## Wintersemester 2021/2022

# Signale und Systeme II

## Übungsaufgaben

| Übung | Datum | Themen | Aufgaben |
|---|---|---|---|
| 1 | 29.10.2021 | Organisation und Matlab-Einführung | - |
| 2 | 05.11.2021 | Amplitudenmodulation - Theorie | - |
| 3 | 12.11.2021 | Zweiseitenband- und Amplitudenmodulation | 1 und 2 |
| 4 | 19.11.2021 | Winkel- und Frequenzmodulation - Theorie | - |
| 5 | 26.11.2021 | Winkel- und Frequenzmodulation | 3 und 4 |
| 6 | 03.12.2021 | Puls-Amplituden-Modulation - Theorie | - |
| 7 | 10.12.2021 | Puls-Amplituden-Modulation | 5 |
| 8 | 17.12.2021 | Stochastische Prozesse - Theorie | - |
| - | 24.12.2021 | - | - |
| - | 31.01.2022 | - | - |
| 9 | 07.01.2022 | Stationarität und Ergodizität | 7 |
| 10 | 14.01.2022 | Autokorrelation und Korrelationsanalysen - Theorie | - |
| 11 | 21.01.2022 | Kreuz- und Autokorrelation und stochastische Signale | 8 und 9 |
| 12 | 28.01.2022 | Hilbert-Transformation - Theorie | - |
| 13 | 04.02.2022 | Autokorrelation und Hilbert-Transformation | 10 und 14 |
| 14 | 11.02.2022 | Zustandsraum - Theorie | - |
| 15 | 18.02.2022 | Systembeschreibung im Zustandsraum | 15 |

# Inhaltsverzeichnis

## 1 Modulationssystem zur Sprachübertragung

Das in Abbildung 1 dargestellte Modulationssystem dient zum Schutz einer Sprachübertragung gegen unerlaubtes Mithören. Das Spektrum des reellwertigen Eingangssignals $u(t)$ ist in Abbildung 2 für $\omega > 0$ dargestellt.

*(a)* Analysieren Sie die Wirkungsweise der Schaltung durch Angabe der Spektren $G_i(j\omega) = \mathcal{F}\{g_i(t)\}$ an den einzelnen Punkten $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ der Schaltung.

*(b)* Ergänzen Sie die fehlenden Angaben $\omega_S$ und $\omega_D$ für das verwendete Hochpassfilter (HP) und das Tiefpassfilter (TP), wie sie in Abbildung 2 spezifiziert sind.

*(c)* Zeigen Sie, dass das gleiche System auch zur Demodulation geeignet ist.

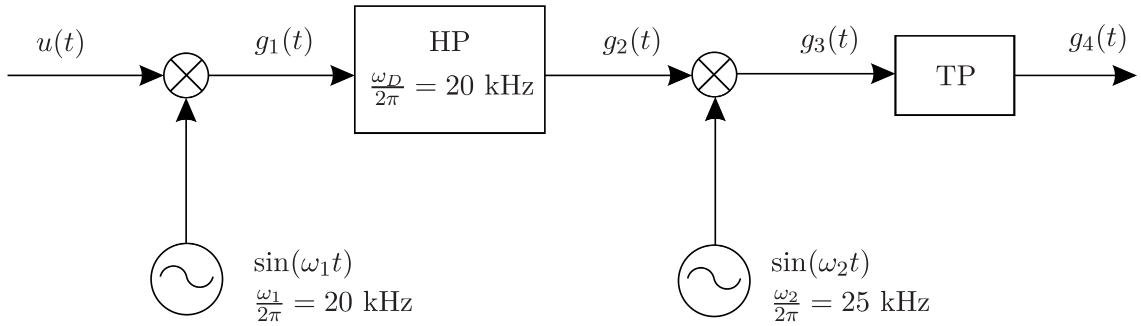


Abbildung 1: Modulationssystem zu Aufgabe 1.

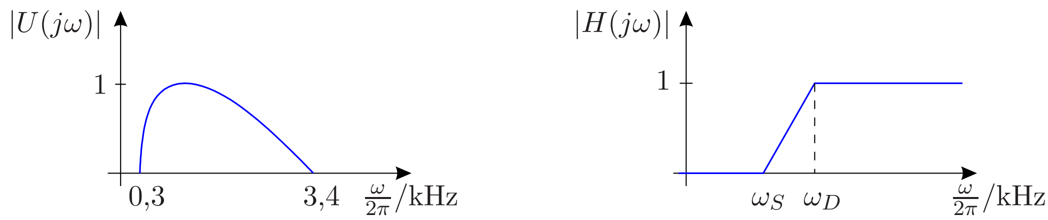


Abbildung 2: Spektrum des Eingangssignals und Frequenzgang des Hochpassfilters zu Aufgabe 1.

## 2 Amplitudenmodulation

Gegeben ist das reellwertige, bandbegrenzte Signal $v(t)$, für dessen Spektrum

$$V(j\omega) = 0 \quad \forall\, |\omega| > \omega_g$$

gilt. Zur Übertragung soll dieses Signal so modifiziert werden, dass das resultierende Spektrum $V_c(j\omega)$ um die Frequenz $\omega_T \gg \omega_g$ „verschoben" wird. Gelten soll also

$$V_c(j\omega) = 0 \quad \forall\, (\omega_T - \omega_g) > \omega > (\omega_T + \omega_g).$$

*(a)* Welcher Ansatz für eine solche Modifikation ergibt sich aus dem Modulationssatz? Wie kann das Ausgangssignal $v(t)$ aus dem modulierten Signal $v_c(t)$ zurückgewonnen werden?

*(b)* Was ist ein Nachteil der Modulationsmethode aus (a)? Die Zweiseitenband-Modulation (ZSB-Modulation) umgeht dieses Problem. Wie wird hier das modulierte Signal $y_z(t)$ erzeugt und wie kann es demoduliert werden?

*(c)* Ein Nachteil der ZSB-Modulation wird ersichtlich, wenn man das Spektrum $Y_z(j\omega)$ des modulierten Signals skizziert. Welche Erweiterung der ZSB-Modulation kann hier helfen, wie heißt diese Modulationsart und welche Vorteile bietet sie bei der Demodulation?

*(d)* Die Amplitudenmodulation ist ein weit verbreitetes, der ZSB-Modulation ähnliches, Verfahren. Worin bestehen die Gemeinsamkeiten?

## 3 Winkelmodulation

Wie in der Vorlesung vorgestellt kann die Winkelmodulation als kontinuierliche Modulation eines Sinusträgers verstanden werden:

$$c_T(t) = \hat{c}_T \cos(\omega_T t + \varphi_T) = \hat{c}_T \cos(\Phi_T(t)) .$$

*(a)* Wie liese sich eine ZSB-Modulation in diesem Trägersignal $c_T(t)$ integrieren?

*(b)* Welcher prinzipielle Unterschied besteht zwischen der Frequenzmodulation (FM) und der Phasenmodulation (PM)?

*(c)* In Abbildung 3 ist ein einfaches Nutzsignal $v(t)$ dargestellt. Bestimmen Sie jeweils für PM und FM die Momentan-Frequenz $\Omega_T(t)$ und skizzieren Sie diese.

*(d)* Welche Systemeigenschaften weist die Winkelmodulation bezüglich der Linearität, der Kausalität, der Verschiebungsinvarianz und der Stabilität auf? Weisen Sie diese Eigenschaften nach.

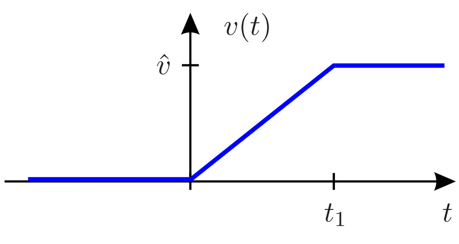


Abbildung 3: Nutzsignal zu Aufgabe 3.

## 4 Frequenzmodulation

Gegeben ist ein frequenzmoduliertes Signal der Form

$$c_T(t) = \hat{c}_T \cdot \cos\left(\omega_T t + \frac{2\pi\Delta f}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)\right) \quad .$$

| | |
|---|---|
| Trägeramplitude | $\hat{c}_T = 2$ V |
| Trägerfrequenz | $\omega_T = 2\pi \cdot 10,7 \cdot 10^6 s^{-1}$ |
| Frequenzhub | $\Delta f = 75 \cdot 10^3 s^{-1}$ |

*(a)* Bei welcher Modulationsfrequenz wird mit den angegebenen Werten der Modulationsgrad $\eta = 5$ erreicht?

*(b)* Wie groß ist nach Carson die zur Übertragung dieses FM-Signals erforderliche Bandbreite?

*(c)* Welchen Frequenzabstand besitzen die einzelnen Spektrallinien des FM-Signals zueinander, und wieviele Linien werden durch die Abschätzung nach Carson berücksichtigt?

*(d)* Ermitteln Sie mit Hilfe von Abbildung 4 die Beträge der Amplituden der Spektrallinien bis zur Ordnung $\mu = 3$ und geben Sie die zugehörigen Frequenzen an.

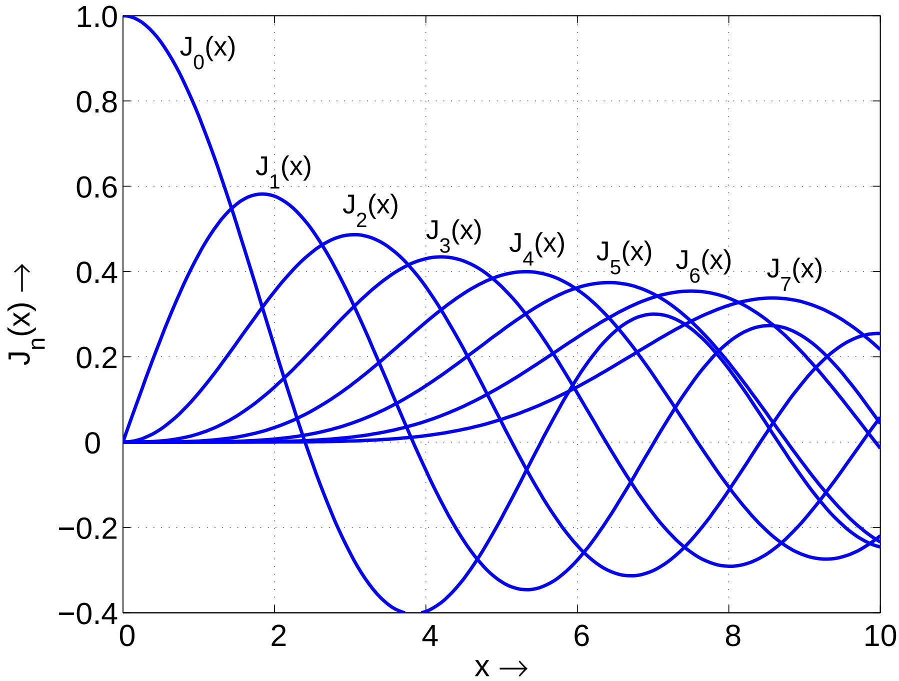


Abbildung 4: Besselfunktionen 1. Gattung $n$-ter Ordnung, zu Aufgabe 4.

## 5 Puls-Amplituden-Modulation und Quantisierung

In dieser Aufgabe werden die Grundlagen der Puls-Amplituden-Modulation (PAM) wiederholt. Dabei bezeichne $v(t)$ das Informationssignal und $y_p(t)$ das modulierte Signal. $V(j\omega)$ und $Y_p(j\omega)$ seien die entsprechenden Spektren.

*(a)* Worin unterscheiden sich PAM und Amplitudenmodulation, worin liegen die Gemeinsamkeiten?

*(b)* Wie kann ein PAM-Signal demoduliert werden? Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit eine Demodulation überhaupt möglich ist. Erklären Sie dies, indem Sie ein geeignetes Spektrum $V(j\omega)$ annehmen und das resultierende Spektrum $Y_p(j\omega)$ skizzieren.

*(c)* Welcher weitere Schritt ist notwendig, um aus dem PAM-Signal ein digitales Signal $v_Q(n)$ zu erzeugen?

## 6 Laplaceverteilung

Gegeben ist die Laplace-verteilte Zufallsvariable $v$, für deren Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gilt

$$f_v(x) = \frac{\alpha}{2}\, e^{-\alpha|x|}.$$

*(a)* Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_v(x)$ und auch grob die Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_v(x)$. Welcher Wertebereich ist für den Parameter $\alpha$ zulässig?

*(b)* Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_v(x)$.

*(c)* Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}\{v\}$ sowie die Varianz $\sigma_v^2$.

*(d)* Bestimmen Sie die charakteristische Funktion $C_v(\omega)$ der Laplaceverteilung.

*(e)* Mit Hilfe des Momententheorems

$$\mathrm{E}\{v^k\} = \frac{1}{j^k} \frac{d^k C_v(\omega)}{d\omega^k}\bigg|_{\omega=0}$$

kann das $k$te Moment aus der charakteristischen Funktion bestimmt werden. Überprüfen Sie damit Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe (c).

## 7 Stationarität und Ergodizität

In dieser Aufgabe werden wichtige Grundbegriffe zur Beschreibung von Zufallsprozessen wiederholt. Die folgenden Fragen sollen auf einige Versuche mit MATLAB hinführen.

*(a)* Zwei bedeutende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen sind die Gleichverteilung und die Normalverteilung (auch Gaußverteilung genannt). Geben Sie jeweils die Verteilungsdichtefunktionen an und skizzieren Sie diese.

*(b)* Was bedeutet Stationarität?

*(c)* Was bedeutet Ergodizität?

*(d)* Gegeben seien $N$ Werte $v(n)$ der Realisierung eines Zufallsprozesses. Wie können Schätzwerte $\hat{m}_v$ und $\hat{\sigma}_v^2$ für Mittelwert und Varianz des Prozesses bestimmt werden?

## 8 Kreuz- und Autokorrelation

In dieser Aufgabe werden einige Eigenschaften der Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) bzw. -folge und der Autokorrelationsfunktion (AKF) bzw. -folge untersucht.

*(a)* Zeigen Sie, dass für die KKF gilt

$$s_{v_1 v_2}(\kappa) = s^*_{v_2 v_1}(-\kappa).$$

Was folgt daraus für die KKF der reellen Signale $v_1(n),\ v_2(n)$? Wie kann dieser Zusammenhang auf die AKF eines reellen Signals übertragen werden?

*(b)* Zeigen Sie, dass für zwei reelle Zufallsvariablen $v_1$ und $v_2$ die Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt:

$$[\mathrm{E}\{v_1 v_2\}]^2 \leq \mathrm{E}\{v_1^2\}\,\mathrm{E}\{v_2^2\}.$$

Was folgt daraus für die AKF eines reellen Signals?

*(c)* Wie lassen sich die in *(a)* und *(b)* für diskrete Signale erzielten Ergebnisse auf die KKF bzw. AKF von kontinuierlichen Signale übertragen?

*(d)* Das Leistungsdichtespektrum $S_{vv}(j\omega)$ ist die Fouriertransformierte der AKF $s_{vv}(\tau)$. Zeigen Sie, dass für $\forall \omega \in \mathbb{R}$ gilt: $\quad S_{vv}(j\omega) \geq 0$.

## 9 Stochastische Signale und lineare Systeme

Ein Nutzsignal $x(t) = a \cdot \cos(\omega_0 t)$ ist additiv durch mittelwertfreies weißes Rauschen $z(t)$ mit der Varianz $\sigma_z^2$ gestört, so dass nur das Signal

$$v(t) = x(t) + z(t)$$

gemessen werden kan. Dieses Signal $v(t)$ soll mit einem System mit dem Frequenzgang

$$H(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} \qquad \text{mit } \alpha > 0$$

gefiltert werden, um so das Signal $y(t)$ zu erhalten.

*(a)* Berechnen Sie den Erwartungswert des gefilterten Signals $y(t)$.

*(b)* Geben Sie das Verhältnis von Nutz- zu Störleistung (SNR) am Filterausgang an.

*(c)* Für welche Wahl von $\alpha$ wird das SNR maximal?

## 10 Autokorrelation und lineare Systeme

Die Autokorrelierte $s_{vv}(\kappa)$ einer Zufallsfolge $v(n)$ sei für $\kappa \geq 0$ durch

$$s_{vv}(\kappa) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa}, \ \kappa \geq 0$$

gegeben.

*(a)* Geben Sie $s_{vv}(\kappa)$ für $\kappa \leq 0$ an.

*(b)* Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz von $v(n)$.

*(c)* Berechnen Sie die z-Transformierte $S_{vv}(z)$ von $s_{vv}(\kappa)$.

*(d)* Die Folge $v(n)$ werde auf ein System mit der Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{z+2}{z+\frac{1}{2}}$$

gegeben. Geben Sie $S_{yy}(z)$ und $s_{yy}(\kappa)$ an.

## 11 Idealisierte Systeme

Gegeben ist ein einseitiger idealer Bandpass mit der Mittenfrequenz $\omega_m$, einer Bandbreite von $2\Delta\omega$ und einer linearen Phase von $(-\omega t_0)$.

*(a)* Wie lautet der Frequenzgang $H^{(1)}(j\omega)$ dieses Bandpasses?

*(b)* Berechnen Sie die Impulsantwort $h_0^{(1)}(t)$ dieses Bandpasses.

*(c)* Wie lautet der Frequenzgang $H^{(2)}(j\omega)$ eines entsprechenden zweiseitigen Bandpasses?

*(d)* Berechnen Sie die Impulsantwort $h_0^{(2)}(t)$ des zweiseitigen Bandpasses

## 12 Idealisierte Systeme

Betrachtet wird ein linearphasiges System $S^{(1)}$ mit einer kosinusförmigen Betragsschwankung:

$$H^{(1)}(j\omega) = H_0\,(1 + \alpha\cos(\omega\tau))\,e^{-j\omega t_0}.$$

*(a)* Wie lautet die Impulsantwort des Systems $S^{(1)}$ ?

*(b)* Das Ausgangssignal von $S^{(1)}$ wird mit Hilfe eines idealen Tiefpassfilters $S^{(2)}$ mit der Grenzfrequenz $\omega_g$ bandbegrenzt. Geben sie die Impulsantwort der Kaskade aus $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ an.

## 13 Filterung und Autokorrelation

Diese Aufgabe wiederholt einige Grundbegriffe zur Autokorrelation und soll auf einen kleinen Versuch mit MATLAB vorbereiten.

Gegeben sei das Signal $v(n)$ als weißes Rauschen mit Mittelwert $m_v = 0$. Dieses soll mit einem schmalbandigen Bandpassfilter $H(z)$ gefiltert werden, um so das Ausgangssignal $y(n)$ zu erhalten.

*(a)* Durch welche Differenzengleichung kann die Bandpassfilterung beschrieben werden? Geben Sie auch die Übertragungsfunktion $H(z)$ in allgemeiner Form an.

*(b)* Wie ist die Autokorrelationsfolge $s_{vv}(\kappa)$ für stationäre Signale definiert? Wie kann sie geschätzt werden, wenn für $v(n)$ eine Messung vorliegt? Worin unterscheiden sich die Autokorrelation $s_{vv}(\kappa)$ und die Autokovarianz $\psi_{vv}(\kappa)$?

*(c)* Skizzieren Sie $s_{vv}(\kappa)$. Welche Unterschiede erwarten Sie für die Autokorrelationsfolge $s_{yy}(\kappa)$ nach der Filterung?

## 14 Hilbert-Transformation und Einseitenbandmodulation

In dieser Aufgabe werden zuerst Grundlagen zur Hilbert-Transformation wiederholt und anschließend eine Anwendungsmöglichkeit untersucht.

*(a)* Wie ist die Hilbert-Transformation definiert? Geben Sie sowohl Frequenzgang als auch Impulsantwort an. Was ist unter dem *analytischen Signal* $v_a(t)$ zu verstehen?

*(b)* Ist der Hilbert-Transformator kausal? Ist er bandbegrenzt?

*(c)* Geben Sie eine Realisierung der idealen Einseitenbandmodulation mit Hilfe des Hilbert-Transformators als Blockschaltbild an. Verwenden Sie dabei die Definition der Einseitenbandmodulation.

*(d)* Ist das resultierende System aus *(c)* kausal und bandbegrenzt? Wenn nicht, modifizieren Sie das System so, dass es kausal und bandbegrenzt wird.

## 15 Systembeschreibung im Zustandsraum

Gegeben ist ein System, beschrieben durch folgende Zustandsgleichungen:

$$\mathbf{x}(n+1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v(n)$$
$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(n) + v(n)$$

*(a)* Berechnen Sie $y(n)$ für $n \in \{0,\ 1\}$ bei einer Anregung $v(n) = \gamma_0(n)$ und einem

Anfangszustand

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

*(b)* Welchen Wert nimmt $\mathbf{x}(n)$ im eingeschwungenen Zustand ein?

*(c)* Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Systems.

*(d)* Berechnen Sie die Impulsantwort $h_0(n)$.

## 16 Systembeschreibung im Zustandsraum†

Ein System sei durch die folgenden Zustandsgleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(n) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}(n) \\ \mathbf{y}(n) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(n) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{v}(n) \end{aligned}$$

mit $\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad$ und $\quad \mathbf{D} = \mathbf{0}$ .

*(a)* Zeichnen Sie den Signalflussgraphen des Systems.

*(b)* Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix $\mathbf{H}(z)$.

*(c)* Wie lautet die Impulsantwortmatrix $\mathbf{h}_0(n)$ ?