Signale und Systeme II

Modulklausur WS 2020 / 2021

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

Datum: 10.03.2021

Name: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.
Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ____________________

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/34	/33	/33

Summe der Punkte: __________ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den __________ Unterschrift: ____________________

Signale und Systeme II

Modulklausur WS 2020 / 2021

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort:	LS4 - R. 11-16
Datum:	10.03.2021
Beginn:	12:00 h
Einlesezeit:	10 Minuten
Bearbeitungszeit:	90 Minuten

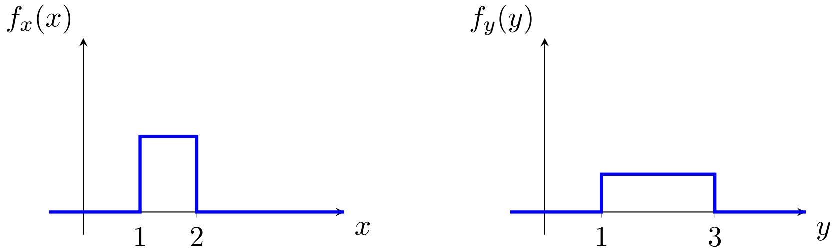
Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (34 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

Gegeben sind zwei gleichverteilte, reelle Zufallsvariablen x und y mit den Wahrscheinlichkeitsdichten $f_x(x)$ und $f_y(y)$ in grafischer Form:



(a) Geben Sie $f_x(x)$ und $f_y(y)$ an! (3 P)
Die Funktionswerte sind über die Breite der Rechtecke gegeben.

$$f_x(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } 1 < x \vee x \geq 2 \\ 1, & \text{für } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} 0, & \text{für } 1 < y \vee y \geq 3 \\ \frac{1}{2}, & \text{für } 1 \leq y < 3 \end{cases}$$

(b) Geben Sie die Verbunddichte $f_{xy}(x,y)$ an. Gehen Sie davon aus, dass x und y stochastisch unabhängig voneinander sind. (3 P)

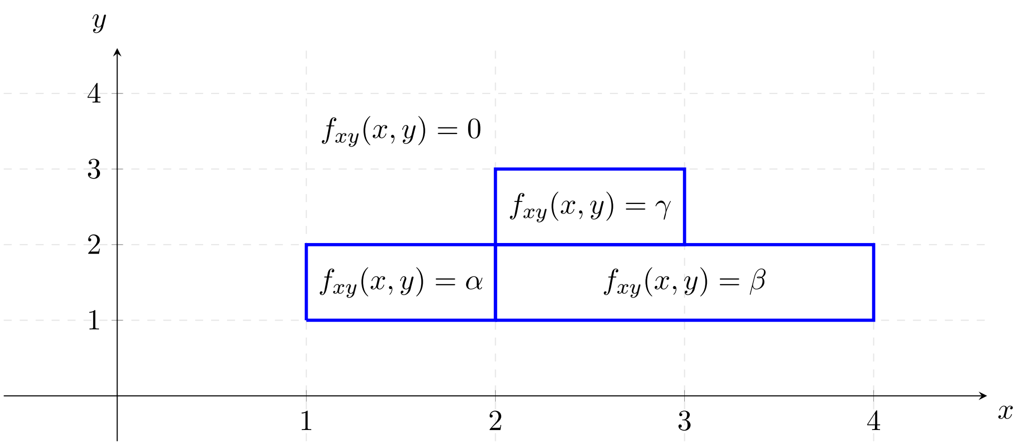
$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \wedge 1 \leq y < 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) Berechnen Sie die Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung $F_{xy}(x,y)$. (5 P)

$$
\begin{aligned}
F_{xy}(x,y) &= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{xy}(\tilde{x},\tilde{y})d\tilde{x}d\tilde{y} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1 \vee y < 1 \\ \frac{1}{2}\int_1^y \int_1^x d\tilde{x}d\tilde{y}, & \text{für } 1 \leq x < 2 \wedge 1 \leq y < 3 \\ \frac{1}{2}\int_1^y \int_1^2 d\tilde{x}d\tilde{y}, & \text{für } 2 \leq x \wedge 1 \leq y < 3 \\ \frac{1}{2}\int_1^3 \int_1^x d\tilde{x}d\tilde{y}, & \text{für } 1 \leq x < 2 \wedge 3 \leq y \\ 1, & \text{für } 2 \leq x \wedge 3 \leq y \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1 \vee y < 1 \\ \frac{1}{2}[\tilde{x}]_1^x[\tilde{y}]_1^y, & \text{für } 1 \leq x < 2 \wedge 1 \leq y < 3 \\ \frac{1}{2}[\tilde{x}]_1^2[\tilde{y}]_1^y, & \text{für } 2 \leq x \wedge 1 \leq y < 3 \\ \frac{1}{2}[\tilde{x}]_1^x[\tilde{y}]_1^3, & \text{für } 1 \leq x < 2 \wedge 3 \leq y \\ 1, & \text{für } 2 \leq x \wedge 3 \leq y \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1 \vee y < 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)(y-1), & \text{für } 1 \leq x < 2 \wedge 1 \leq y < 3 \\ \frac{1}{2}(2-1)(y-1), & \text{für } 2 \leq x \wedge 1 \leq y < 3 \\ \frac{1}{2}(x-1)(3-1), & \text{für } 1 \leq x < 2 \wedge 3 \leq y \\ 1, & \text{für } 2 \leq x \wedge 3 \leq y \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1 \vee y < 1 \\ \frac{xy-x-y+1}{2}, & \text{für } 1 \leq x < 2 \wedge 1 \leq y < 3 \\ \frac{1}{2}(y-1), & \text{für } 2 \leq x \wedge 1 \leq y < 3 \\ x-1, & \text{für } 1 \leq x < 2 \wedge 3 \leq y \\ 1, & \text{für } 2 \leq x \wedge 3 \leq y \end{cases}
\end{aligned}
$$

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

Gegeben ist die Verbunddichte $f_{xy}(x,y)$ der reellen Zufallsvariablen x und y. Die Dichte ist in grafischer Form gegeben und vollständig definiert, indem Bereiche gleicher Funktionswerte eingerahmt und mit Höhenangaben versehen sind. Hierbei gilt allgemein $\alpha, \beta, \gamma \in \Re_+$.



(d) Wie muss β gewählt werden, wenn $\alpha = 0{,}2$ und $\gamma > 0$ gilt? Welche Einschränkung gilt dann für γ? Es muss $\alpha + 2\beta + \gamma = 1$ gelten. Daraus folgt $\beta = 0{,}4 - 0{,}5\gamma$ mit $0 < \gamma < 0{,}8$. (3 P)

(e) Stellen Sie das Integral zur Berechnung der Randdichte $f_x(x)$ auf. Setzen Sie dabei alle verfügbaren Werte und Grenzen ein! (5 P)

$$
\begin{aligned}
f_x(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)dy \\
&= \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1 \vee 4 \leq x \\ \int_1^2 \alpha dy, & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ \int_1^2 \beta dy + \int_2^3 \gamma dy, & \text{für } 2 \leq x < 3 \\ \int_1^2 \beta dy, & \text{für } 3 \leq x < 4 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Es gelte nun $\alpha = 0$ und $\gamma = 0$. Ferner sei die Abbildung $z = 3x + y$ definiert.

(f) Berechnen Sie das zweite stochastische Moment von z. Geben Sie das Ergebnis als reinen Zahlenwert an! (8 P)

$$
\begin{aligned}
m_z^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_z(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (3x+y)^2 f_{xy}(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (9x^2 + 6xy + y^2) f_{xy}(x,y)dxdy \\
&= \beta \int_1^2 \int_2^4 (9x^2 + 6xy + y^2)dxdy \\
&= \frac{1}{2} \int_1^2 \int_2^4 (9x^2 + 6xy + y^2)dxdy \\
&= \frac{1}{2} \int_1^2 \left[3x^3 + 3yx^2 + xy^2\right]_2^4 dy \\
&= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(192 + 48y + 4y^2 - 24 - 12y - 2y^2\right) dy \\
&= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(168 + 36y + 2y^2\right) dy \\
&= \frac{1}{2} \left[168y + 18y^2 + \frac{2}{3}y^3\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(336 + 72 + \frac{16}{3} - 168 - 18 - \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{680}{3} \\
&= \frac{340}{3}
\end{aligned}
$$

Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.*

Gegeben sei die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_x(x) = \sum_{i=0}^{1} \alpha_i f_x^{(i)}(x)$$

der reellen Zufallsgröße x, wobei die Teildichten wie folgt definiert sind:

$$f_x^{(i)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x,i}} e^{-\frac{(x-m_{x,i})^2}{2\sigma_{x,i}^2}}.$$

Es gelte $m_{x,0} = 1$, $\alpha_1 = 0{,}7$ und $\mathrm{E}\{x\} = 3{,}1$.

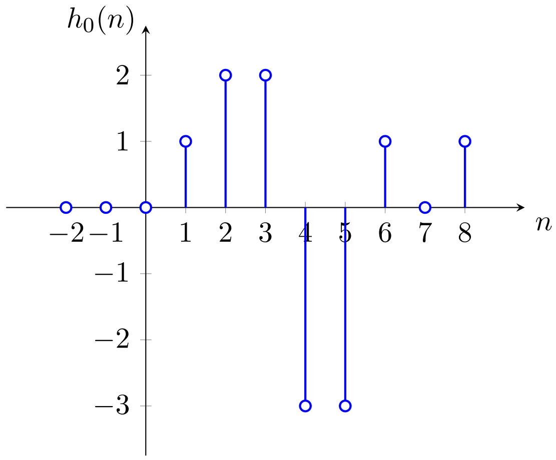
(g) Bestimmen Sie $m_{x,1}$. (4 P)
Es gilt $\alpha_0 = 0{,}3$. Ferner gilt $\mathrm{E}\{x\} = \alpha_0 m_{x,0} + \alpha_1 m_{x,1}$, wodurch $m_{x,1} = 4$ gilt.

(h) Bestimmen Sie das zweite stochastische Moment von x, wenn die Standardabweichung von x als $\sigma_x = 5$ gegeben ist. (3 P)
Es gilt allgemein $\mathrm{Var}\{x\} = \mathrm{E}\{x^2\} - \mathrm{E}^2\{x\}$. Daraus folgt $\mathrm{E}\{x^2\} = \sigma_x^2 + \mathrm{E}^2\{x\} = 34{,}61$.

Aufgabe 2 (33 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei nachfolgende diskrete Impulsantwort $h_0(n)$:



Wobei zusätzlich gelte:

$$h_0(n) = 0 \;\forall\; n < 0,$$
$$h_0(n) = 1 \;\forall\; n \geq 8.$$

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Impulsantwort auf der Basis gewichteter Impuls- und Sprungfolgen. (4 P)

$$h_0(n) = \gamma_{-1}(n-1) + \gamma_{-1}(n-2) - 5\gamma_{-1}(n-4) + 4\gamma_{-1}(n-6) - \gamma_0(n-7)$$

(b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$. (4 P)

Unter Nutzung bekannter Korrespondenzen:

$$\begin{aligned} H(z) &= z^{-1}\frac{z}{z-1} + z^{-2}\frac{z}{z-1} - 5z^{-4}\frac{z}{z-1} + 4z^{-6}\frac{z}{z-1} - z^{-7} \\ &= \frac{1}{z-1} + \frac{z^{-1}}{z-1} - 5\frac{z^{-3}}{z-1} + 4\frac{z^{-5}}{z-1} - z^{-7} \\ &= \frac{1 + z^{-1} - 5z^{-3} + 4z^{-5} - z^{-7}(z-1)}{z-1} \\ &= \frac{1 + z^{-1} - 5z^{-3} + 4z^{-5} - z^{-6} + z^{-7}}{z-1} \end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie die Differenzengleichung. (4 P)

Aus der Übertragungsfunktion $H(z)$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1 + z^{-1} - 5z^{-3} + 4z^{-5} - z^{-6} + z^{-7}}{z-1} \\ &= \frac{Y(z)}{V(z)} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}(z-1)Y(z) &= (1+z^{-1}-5z^{-3}+4z^{-5}-z^{-6}+z^{-7})V(z)\\ Y(z) &= (z^{-1}+z^{-2}-5z^{-4}+4z^{-6}-z^{-7}+z^{-8})V(z)+z^{-1}Y(z).\end{aligned}$$

Transformation in den Zeitbereich liefert die Differenzengleichung:

$$y(n) = v(n-1)+v(n-2)-5v(n-4)+4v(n-6)-v(n-7)+v(n-8)+y(n-1)$$

(d) Hat das System einen direkten Durchgriff? (5 P)
Begründen Sie ihre Antwort auf Basis

(i) der gegebenen gezeichneten diskreten Impulsantwort.

(ii) der bestimmten diskreten Impulsantwort aus (a).

(iii) der bestimmten Übertragungsfunktion $H(z)$ aus (b).

(iv) der bestimmten Differenzengleichung aus (c).

Das System besitzt keinen Durchgriff.

(i) Für die gezeichnete Impulsantwort gilt $h_0(0) = 0$.

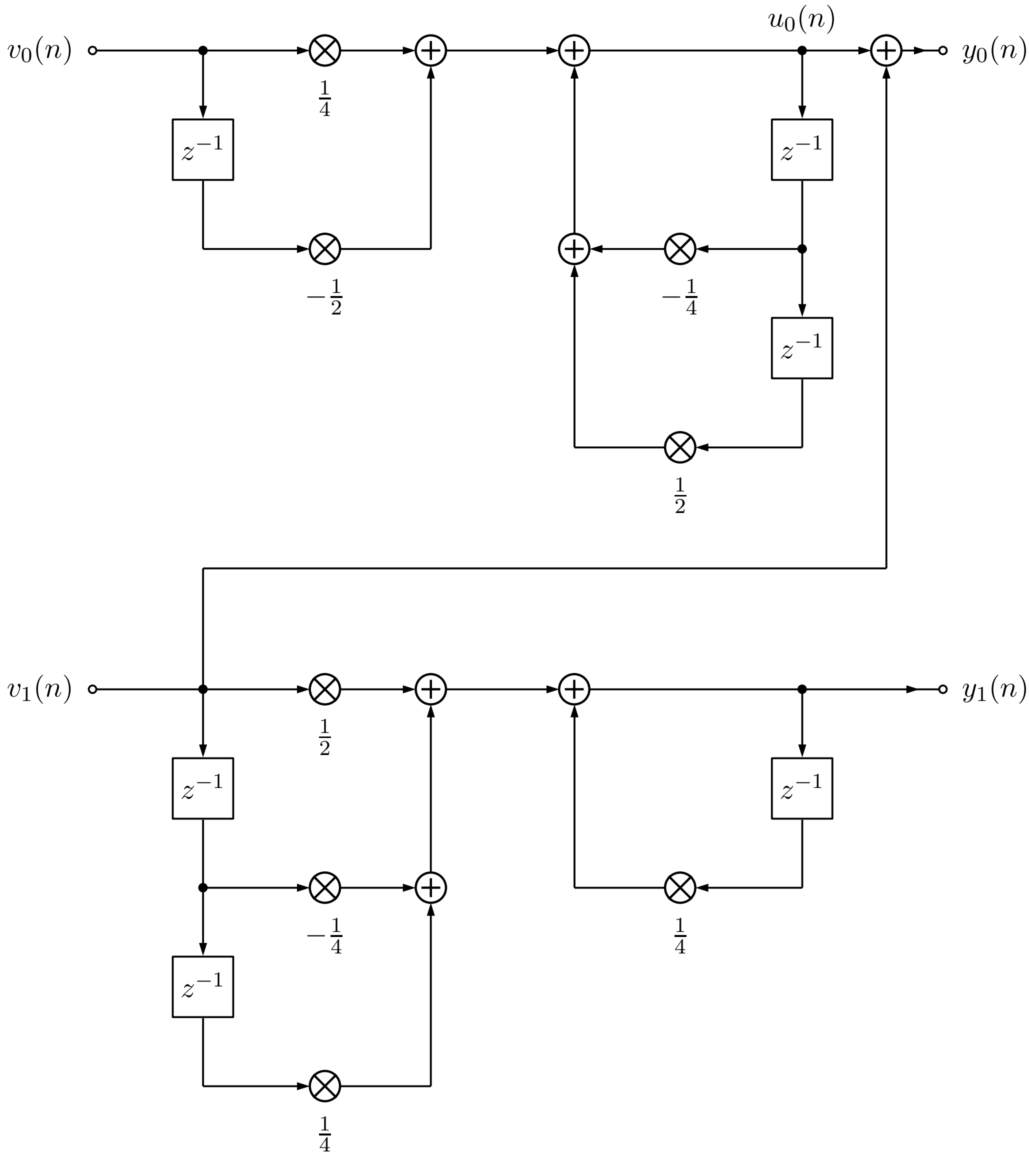
(ii) Die bestimmte Impulsantwort besitzt keinen Eintrag für $n = 0$.

(iii) Für die bestimmte Übertragungsfunktion $H(z)$ gilt Zählergrad $<$ Nennergrad.

(iv) Die bestimmte Differenzengleichung besitzt keinen Eintrag für $n = 0$.

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhägig von Teil 1 gelöst werden.*

Es sei ein System gegeben, welches durch nachfolgende Darstellung in Direktform 1 beschrieben ist.



Der Zustandsraum sei ferner durch die bekannten Gleichungen:

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{v}(n), \tag{1}$$

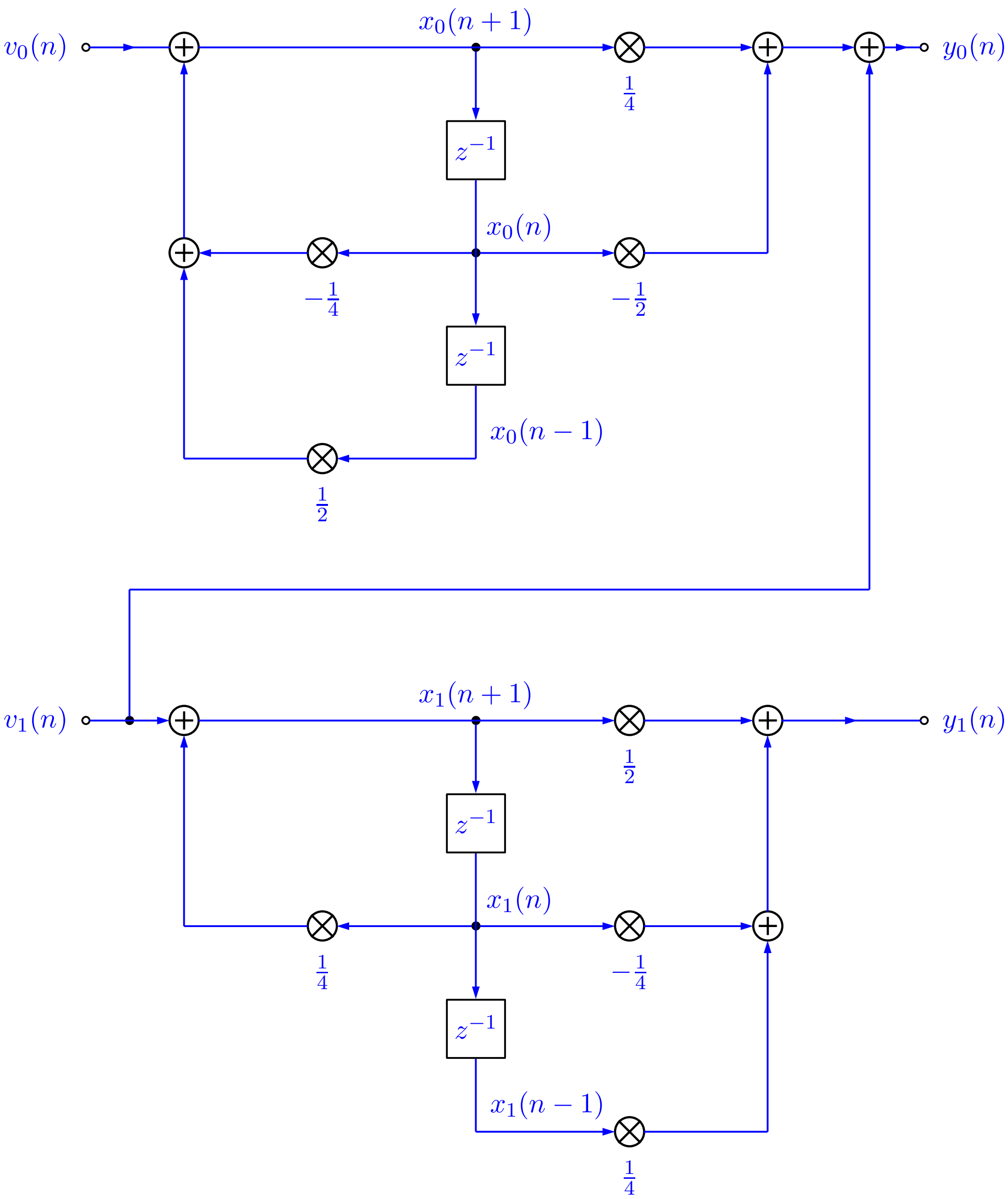
$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{v}(n). \tag{2}$$

beschrieben.

(e) Bestimmen Sie für das gegebene System die Differenzengleichungen für $y_0(n)$ und $y_1(n)$ in Abhängigkeit von $v_0(n)$, $u_0(n)$, $v_1(n)$ und $y_1(n)$. (4 P)

$$y_0(n) = \frac{1}{4}\,v_0(n) - \frac{1}{2}\,v_0(n-1) - \frac{1}{4}\,u_0(n-1) + \frac{1}{2}\,u_0(n-2) + v_1(n)$$
$$y_1(n) = \frac{1}{2}\,v_1(n) - \frac{1}{4}\,v_1(n-1) + \frac{1}{4}\,v_1(n-2) + \frac{1}{4}\,y_1(n-1)$$

(f) Zeichnen Sie das Blockschaltbild in Direktform 2 für obiges System. (4 P)



(g) Bestimmen Sie die Matrizen/Vektoren/Skalare $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ für obiges System mit einer minimalen Anzahl an Speicherelementen. (8 P)

$$\boldsymbol{x}(n) = \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_0(n-1) \\ x_1(n) \\ x_1(n-1) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -a_{0,1} & -a_{0,2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{1,1} & -a_{1,2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{0,1} - b_0 a_{0,1} & \tilde{b}_{0,2} - b_0 a_{0,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{b}_{1,1} - b_1 a_{1,1} & \tilde{b}_{1,2} - b_1 a_{1,2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{9}{16} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 (33 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

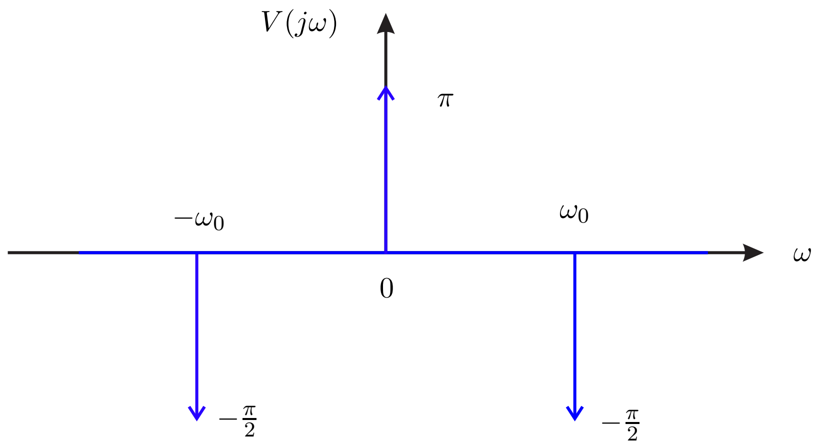
Das Signal $v(t) = \sin^2\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)$ mit $\omega_0 = 2\pi f_0$ und $f_0 = 1$ kHz soll über einen Kanal übertragen werden. Es steht der Frequenzbereich von 10 kHz bis 12 kHz einschließlich der Grenzen zur Übertragung zur Verfügung.

(a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $V(j\omega) = \mathcal{F}\{v(t)\}$ und skizzieren Sie $V(j\omega)$ (denken Sie an die Achsenbeschriftungen!). (4 P)

$$v(t) = \sin^2\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(\omega_0 t)\right],$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$V(j\omega) = \pi\left[\delta_0(\omega) - \frac{1}{2}\delta_0(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2}\delta_0(\omega + \omega_0)\right].$$



(b) Welche Maßnahme muss allgemein ergriffen werden, damit das Signal $v(t)$ über den gegebenen Kanal übertragen werden kann? (1 P)

Das Signal muss moduliert werden, um dessen Spektralanteile in das Übertragungsband zu verschieben.

(c) Geben Sie die allgemeine Funktion der Amplitudenmodulation in Abhängigkeit vom Nutzsignal $v(t)$ an. (1 P)

$$y(t) = [1 + mv(t)]\cos(\omega_\mathrm{T} t).$$

(d) Bestimmen Sie die Trägerfrequenz f_T so, dass das Signal $s(t)$ über den zuvor defi- (1 P)

nierten Kanal übertragen werden kann.

$$f_\mathrm{T} = 11\ \mathrm{kHz} = 11 f_0.$$

(e) Wie kann das amplitudenmodulierte Signal wieder demoduliert werden? Beschreiben Sie **ausführlich** zwei verschiedene Methoden. Zusätzlich können auch formelmäßige Definitionen verwendet werden. (8 P)

Man kann entweder eine Synchron-Demodulation durchführen, dafür muss das empfangene Signal wieder mit dem Träger multipliziert werden und danach mit einem Tiefpass gefiltert werden.

$$\begin{aligned} x(t) &= y(t)\cos(\omega_\mathrm{T}) = [1 + mv(t)]\cos^2(\omega_\mathrm{T}), \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}mv(t) + \frac{1}{2}\cos(2\omega_\mathrm{T}t) + \frac{1}{2}mv(t)\cos(2\omega_\mathrm{T}t), \end{aligned}$$

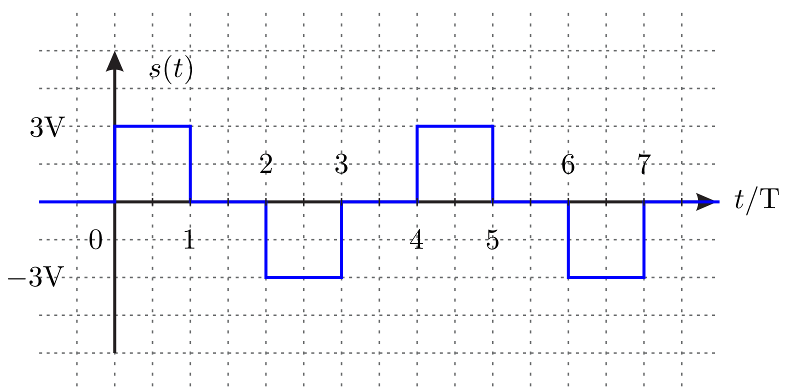
$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\begin{aligned} X(j\omega) = \frac{\pi}{2}\Big[&2\delta_0(\omega) + \frac{m}{\pi}V(j\omega) + \delta_0(\omega + 2\omega_\mathrm{T}) + \delta_0(\omega - 2\omega_\mathrm{T}) \\ &+ mV\Big(j(\omega + 2\omega_\mathrm{T})\Big) + mV\Big(j(\omega - 2\omega_\mathrm{T})\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Anschließend Tiefpassfilterung um Anteile bei $\omega + 2\omega_\mathrm{T}$ und $\omega - 2\omega_\mathrm{T}$ zu unterdrücken. Zweite Variante ist die Einhüllendendemodulation, hier kann auf die erneute Multiplikation mit dem Träger verzichtet werden. Es wird im ersten Schritt eine Gleichrichtung durchgeführt und anschließend mit einem Tiefpass gefiltert. Das gleichgerichtete Signal kann durch eine Fourier-Reihe beschrieben werden.

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Das kontinuierliche Signal $s(t)$, siehe Grafik unten, soll mit Hilfe der FM-Modulation über einen Kanal übertragen werden. Für $t > 7\mathrm{T}$ und $t < 0$ ist $s(t) = 0$.



(f) Geben Sie die allgemeine Funktion der Winkelmodulation an und benennen Sie die einzelnen Komponenten. (3 P)

Nach der Vorlesung *Signale und Systeme II* hat die kontinuierliche Winkelmodulation folgende Form:

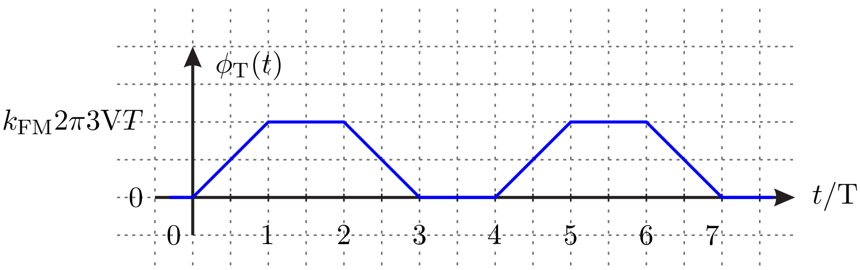
$$
\begin{aligned}
c_\mathrm{T} =& \hat{c}_\mathrm{T} \cos\left(\omega_\mathrm{T} t + \phi_\mathrm{T}(t)\right) = \hat{c}_\mathrm{T} \cos\left(\Phi_\mathrm{T}(t)\right),\\
\text{Träger} :& c_\mathrm{T},\\
\text{Trägeramplitude} :& \hat{c}_\mathrm{T},\\
\text{Trägerfrequenz} :& \omega_\mathrm{T},\\
\text{Trägerphase} :& \phi_\mathrm{T}(t),\\
\text{Träger} - \text{Winkel} - \text{Momentanphase} :& \Phi_\mathrm{T}(t).
\end{aligned}
$$

(g) Geben Sie die Momentan-Frequenz $\Omega_\mathrm{T}(t)$ und die Momentan-Phase $\Phi_\mathrm{T}(t)$ in Abhängigkeit von $s(t)$ und der Modulationskonstante k_FM an. (4 P)

$$
\begin{aligned}
\Omega_\mathrm{T}(t) &= \omega_\mathrm{T} + k_\mathrm{FM} 2\pi s(t),\\
\Phi_\mathrm{T}(t) &= \omega_\mathrm{T} t + k_\mathrm{FM} 2\pi \int_{-\infty}^{t} s(\tau) d\tau,\\
&= \omega_\mathrm{T} t + \phi_\mathrm{T}(t).
\end{aligned}
$$

(h) Berechnen Sie die Trägerphase (Nicht die Momentan-Phase!) $\phi_\mathrm{T}(t)$ und skizzieren Sie diese! (6 P)

$$
\phi_\mathrm{T}(t) = k_\mathrm{FM} 2\pi \int_{-\infty}^{t} s(\tau) d\tau = \begin{cases}
k_\mathrm{FM} 2\pi 3\mathrm{V} t, & \text{für } 0 < t < T,\\
k_\mathrm{FM} 2\pi 3\mathrm{V} (t - 4T), & \text{für } 4T < t < 5T,\\
k_\mathrm{FM} 2\pi 3\mathrm{V} T, & \text{für } T < t < 2T \text{ und } 5T < t < 6T,\\
-k_\mathrm{FM} 2\pi 3\mathrm{V} (t - 3T), & \text{für } 2T < t < 3T,\\
-k_\mathrm{FM} 2\pi 3\mathrm{V} (t - 7T), & \text{für } 6T < t < 7T,\\
0, & \text{für } 3T < t < 4T \text{ und } t < 0 \text{ und } t > 7T.
\end{cases}
$$



(i) Welche Maßeinheit hat die Konstante k_{FM}, wenn das Signal $s(t)$ ein Spannungssignal ist? (2 P)

Das Signal $s(t)$ hat die Maßeinheit Volt [V]. Frequenz wird in $\frac{1}{\mathrm{s}}$ oder in Hz angegeben. Damit kann die Maßeinheit von k_{FM} bestimmt werden. Aus der Gleichung für die Momentan-Frequenz ergibt sich die entsprechende Größengleichung:

$$\begin{aligned} [\Omega_{\mathrm{T}}(t)] &= [\omega_{\mathrm{T}}] + [k_{\mathrm{FM}}] \cdot [s(t)]\,, \\ \mathrm{Hz} &= \mathrm{Hz} + [k_{\mathrm{FM}}] \cdot \mathrm{V}, \\ \mathrm{Hz} &= [k_{\mathrm{FM}}] \cdot \mathrm{V}, \\ [k_{\mathrm{FM}}] &= \frac{\mathrm{Hz}}{\mathrm{V}} = \frac{1}{\mathrm{s} \cdot \mathrm{V}}. \end{aligned}$$

(j) Bestimmen Sie die Modulationskonstante k_{FM} so, dass der Frequenzhub Δf ± 60 kHz entspricht. (3 P)

Nach Vorlesung entspricht der Frequenzhub:

$$\Delta f = k_{\mathrm{FM}} \hat{s},$$

wobei $\hat{s}$ der maximale bzw. minimale Wert des Signals $s(t)$ ist. Damit folgt für die Modulationskonstante:

$$k_{\mathrm{FM}} = \frac{\pm 60 \text{ kHz}}{\pm 3 \text{ V}} = 20 \frac{\mathrm{kHz}}{\mathrm{V}}.$$

Dies ist eine leere Seite.