Signale und Systeme II

Modulklausur WS 2019 / 2020

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

Datum: 04.03.2020

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.
Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________________

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/32	/34	/34

Summe der Punkte: ________________ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ________________ Unterschrift: ______________________________

Signale und Systeme II

Modulklausur WS 2019 / 2020

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort:	OHP5 - Chemiehörsaal I + II
Datum:	04.03.2020
Beginn:	09:00 h
Einlesezeit:	10 Minuten
Bearbeitungszeit:	90 Minuten

Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (32 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei die Verteilungsfunktion des Zufallsprozesses x mit den Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$F_x(x) = \begin{cases} 5\alpha, & \text{für } x < 0 \\ (\beta x)^2, & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 7\gamma, & \text{sonst.} \end{cases}$$

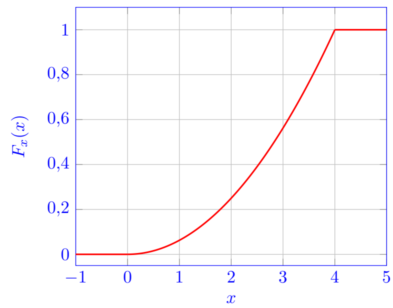
(a) Bestimmen Sie die Unbekannten α, β, γ. (3 P)
$\alpha = 0,\ \beta = \frac{1}{4},\ \gamma = \frac{1}{7}$

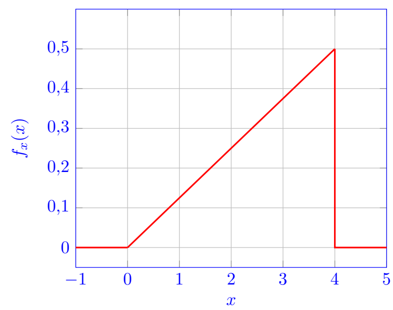
(b) Berechnen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte mit den Ergebnissen aus *(a)*. (3 P)

Es gilt $f_x(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_x(x)$.

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) Skizzieren Sie sowohl die Verteilungsfunktion als auch die Wahrscheinlichkeitsdichte des Zufallsprozesses unter Verwendung Ihrer Ergebnisse aus *(a)*. (4 P)





(d) Gegeben ist nun die Abbildung $y = \sqrt{x}$. Berechnen Sie die ersten beiden statistischen Momente von y. (6 P)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\{y\} &= \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} \cdot 2\beta^2 x \, \mathrm{d}x = 2\beta^2 \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 \\
&= \frac{128}{5}\beta^2 = \frac{8}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\{y^2\} &= \int_0^4 x^{\frac{2}{2}} \cdot 2\beta^2 x \, \mathrm{d}x = 2\beta^2 \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^4 \\
&= \frac{128}{3}\beta^2 = \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Gegeben ist der auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ gleichverteilte Zufallsprozess η. Für einen beliebigen Zeitpunkt $t \in (-\infty, \infty)$ sind die folgenden Abbildungen definiert:

$$
\begin{aligned}
a(t) &= (1+\eta)e^{jt} \\
b(t) &= e^{j(t+\eta)}
\end{aligned}
$$

(e) Berechnen Sie die Scharmittelwerte der beiden Abbildungen. (6 P)

$$
\begin{aligned}
m_a(t) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}(1+\eta)e^{jt} \, \mathrm{d}\eta = \frac{1}{2\pi} e^{jt} \left[\eta + \frac{\eta^2}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{jt} \left[2\pi + \frac{(2\pi)^2}{2} - 0 - 0\right] = (1+\pi)e^{jt}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_b(t) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{j(t+\eta)} \, \mathrm{d}\eta = \frac{1}{j2\pi} \left[e^{j(t+\eta)}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{j2\pi}\left[e^{j(t+2\pi)} - e^{j(t+0)}\right] \\
&= \frac{1}{j2\pi}\left[e^{j(t)} - e^{j(t)}\right] = 0
\end{aligned}
$$

(f) Welche Aussage können Sie bezüglich Stationarität und Ergodizität des Prozesses $a(t)$ machen? Begründen Sie! (2 P)
Der Schaarmittelwert von $a(t)$ ist abhängig von der Zeit (nicht über die Zeit konstant) und somit nicht stationär. Folglich ist auch eine Ergodizität ausgeschlossen.

(g) Analysieren Sie das erste statistische Moment von $b(t)$. Ist es möglich, dass der Prozess $b(t)$ stationär/ergodisch ist oder schließt das Ergebnis der Analyse des ersten statistischen Momentes die Stationarität/Ergodizität des Prozesses bereits grundsätzlich aus? Begründen Sie! (2 P)

Damit ein Prozess stationär sein kann, muss (neben anderem) gelten, dass der Schaarmittelwert unabhängig von der Zeit ist. Dies ist für $b(t)$ gegeben. Für Ergodizität muss (neben anderem) gelten, dass der Prozess stationär ist, und der Zeitmittelwert dem Schaarmittelwert entspricht. Die für Stationarität und Ergodizität anhand des ersten statistischen Momentes prüfbaren Bedingungen sind erfüllt, da sowohl Zeit- als auch Schaarmittelwert identisch null sind.

(h) Berechnen Sie die Varianz vom Imaginärteil von $b(t)$. (4 P)
$\mathrm{Im}\{b(t)\} = \sin(t + \eta)$, analog zu *(e)* ist der Mittelwert identisch 0

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left\{(\sin(t+\eta) - 0)^2\right\} = \mathrm{E}\left\{\sin^2(t+\eta)\right\} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(t+\eta)\,\mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[1 - \cos(2(t+\eta))]\,\mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\eta}{2} - \frac{\sin(2(t+\eta))}{4}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(i) Wie müssen Sie Ihre Aussagen aus (f) und (g) anpassen, wenn η nur auf dem Intervall $[0, \pi)$ gleichverteilt ist? Begründen Sie! (2 P)
Ist η nur auf dem Intervall $[0, \pi)$ gleichverteilt, so gilt

$$m_b(t) = \frac{1}{j\pi}\left[e^{j(t+\pi)} - e^{j(t+0)}\right].$$

Dieser Ausdruck ist zeitabhängig und nicht zwingend identisch 0. Somit ist $b(t)$ für die neue Verteilung weder stationär noch ergodisch. Die Eigenschaften von $a(t)$ ändern sich nicht.

Aufgabe 2 (34 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Ein zeitdiskretes System werde im Zustandsraum durch die Zustands- und Ausgangsgleichung

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(n)$$
$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}(n)$$

beschrieben. Dabei gelte für die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,75 \\ -0,25 & 0,5 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Anzahl an Eingängen L, Zuständen N und Ausgängen R. (3 P)
Eingänge L: 3
Zustände N: 2
Ausgänge R: 3

(b) Besitzt das System einen Durchgriff? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)
Ja, da die Durchgangsmatrix $\boldsymbol{D}$ keine Nullmatrix ist.

(c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$. (3 P)

$$\begin{aligned} N(z) &= \det\{[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]\} \\ &= \det\left\{\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,5 & 0,75 \\ -0,25 & 0,5 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \det\left\{\begin{bmatrix} z+0,5 & -0,75 \\ 0,25 & z-0,5 \end{bmatrix}\right\} \\ &= (z+0,5)(z-0,5) + 0,1875 \\ &= z^2 - 0,0625 \end{aligned}$$

(d) Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix $\boldsymbol{H}(z)$ des Gesamtsystems. (8 P)

$$\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{C}\,[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

$$\begin{aligned} [z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1} &= \frac{1}{\det\{[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]\}}\operatorname{adj}\{[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]\} \\ &= \frac{1}{z^2 - \frac{1}{16}}\begin{bmatrix} z-0,5 & 0,75 \\ -0,25 & z+0,5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}(z) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{z^2-\frac{1}{16}} \begin{bmatrix} z-0,5 & 0,75 \\ -0,25 & z+0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{z^2-\frac{1}{16}} \begin{bmatrix} 2z-1 & 1,5 \\ 3z-1,5 & 2,25 \\ -0,5 & 2z+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{z^2-\frac{1}{16}} \begin{bmatrix} 10z-5 & 2z+2 & 6 \\ 15z-7,5 & 3z+3 & 9 \\ -2,5 & 4z+1,5 & 8z+4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{z^2-\frac{1}{16}} \begin{bmatrix} 10z-5 & 2z+2 & 16z^2+5 \\ 15z-7,5 & 3z+3 & 9 \\ -2,5 & 4z+1,5 & 8z+4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Gegeben sei ein System, das durch die Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{3}{4}}{z(z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{3}{8})}$$

definiert ist.

(e) Bestimmen Sie die Ordnung des Systems. (1 P)
Das System besitzt die Ordnung 3.

(f) Bestimmen Sie die Pol- und Nullstellen von $H(z)$ und zeichnen Sie diese in ein Pol-Nullstellen-Diagramm ein. (5 P)
Berechnung der Nullstellen:
Mit der Formel:

$$z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{3}{4} = 0$$

folgt:

$$
\begin{aligned}
z_{0_{0,1}} &= \frac{1}{8} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{8} \pm \frac{7}{8}.
\end{aligned}
$$

Daraus ergeben sich die Nullstellen

$$z_{0_0} = 1$$

und:

$$z_{0_1} = -\frac{3}{4}.$$

Berechnung der Polstellen:

$$z(z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{3}{8}) = 0.$$

Durch scharfes Hinsehen ergibt sich die erste Polstelle zu:

$$z_{\infty_0} = 0.$$

Die restlichen Polstellen können durch:

$$z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{3}{8} = 0$$

berechnet werden. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} z_{\infty_{0,1}} &= \frac{1}{8} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{3}{8}} \\ &= \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{3}{8}} \\ &= \frac{1}{8} \pm \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Und es folgen die Polstellen:

$$z_{\infty_1} = \frac{3}{4}$$

und:

$$z_{\infty_2} = -\frac{1}{2}.$$

Eingezeichnet in ein Pol-Nullstellen-Diagramm:

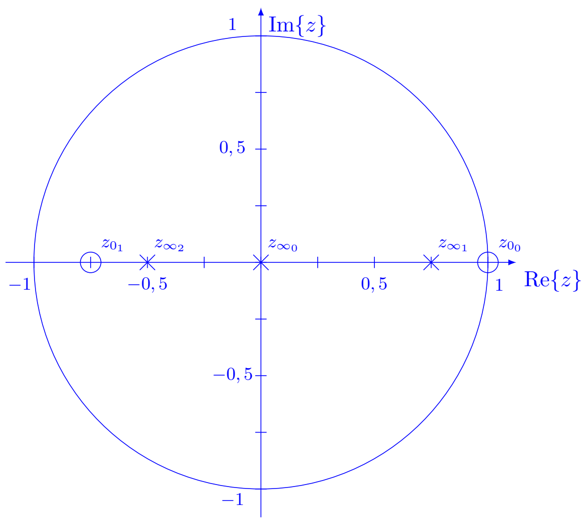


Abbildung 1: Pol-Nullstellendiagramm des Systems $H(z)$.

(g) Ist das System stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)
Ja, da sämtliche Polstellen innerhalb des Einheitskreises liegen.

(h) Geben Sie die Differenzengleichung für das System an. (4 P)
Aus der Gleichung:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{V(z)}$$

folgt:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{V(z)} \\ \frac{z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{3}{4}}{z\left(z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{3}{8}\right)} &= \frac{Y(z)}{V(z)} \\ Y(z)\ \left(z^3 - \frac{1}{4}z^2 - \frac{3}{8}z\right) &= V(z)\ \left(z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{3}{4}\right) \\ Y(z)\ \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}\right) &= V(z)\ \left(z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{3}{4}z^{-3}\right). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Differenzengleichung:

$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + \frac{3}{8}y(n-2) + v(n-1) - \frac{1}{4}v(n-2) - \frac{3}{4}v(n-3).$$

(i) Berechnen Sie die Impulsantwort $h_0(n)$ des Systems im Bereich von $n = 0$ bis einschließlich $n = 5$. Gehen Sie dabei davon aus, dass alle Ausgänge des Systems vor dem Zeitpunkt $n = 0$ null waren. (6 P)

$$\begin{aligned} h_0(0) &= 0 \\ h_0(1) &= 1 \\ h_0(2) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \\ h_0(3) &= \frac{3}{8} - \frac{3}{4} = -\frac{3}{8} \\ h_0(4) &= \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{3}{32} \\ h_0(5) &= \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{32}\right) + \frac{3}{8}\left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{3}{128} - \frac{9}{64} = -\frac{21}{128} \end{aligned}$$

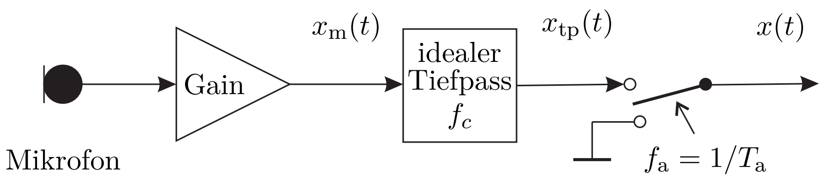
Aufgabe 3 (34 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

(a) Welchem Zweck dient die Modulation eines Signals, laut der Vorlesung? Welche Modulationsarten kennen Sie? Nennen Sie mindestens drei Modulationsarten. (3 P)
Der Zweck der Modulation ist die Anpassung des Signalspektrums an den Frequenzbereich des zu nutzenden Übertragungs-, Speicher-oder Verarbeitungsmediums. Amplituden-, Phasen- und Frequenzmodulation

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

Gegeben sei das nachfolgende Puls-Amplituden-Modulation-System

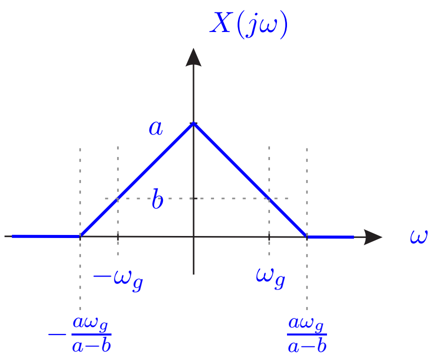


mit dem Spektrum

$$X_{\mathrm{m}}(j\omega) = \mathcal{F}\{x_{\mathrm{m}}(t)\} = \max\left\{a - \frac{|\omega|}{\omega_g}(a-b),\ 0\right\},\ \omega \in \mathbb{R}$$

des bandbegrenzten, zeitkontinuierlichen Mikrofonsignals $x_{\mathrm{m}}(t)$, mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $a > b$.

(b) Skizzieren Sie das Spektrum $X_{\mathrm{m}}(j\omega)$ mit allen Achsenbeschriftungen. (4 P)



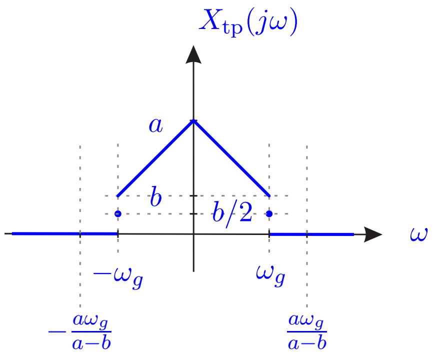
(c) Geben Sie den oberen Grenzwert für die Grenzfrequenz f_c des Tiefpassfilters in Bezug auf die spätere Abtastung an. Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)
Die maximal mögliche Grenzfrequenz des Tiefpassfilters darf nicht größer sein als die halbe Abtastfrequenz, sonst tritt bei der nachfolgenden Abtastung der sogenannte Aliasing-Effekt auf. Also es gilt für die Grenzfrequenz:

$$f_c < f_a/2.$$

(d) Erklären Sie in eigenen Worten den Aliasing-Effekt. Kann die Filterung mit dem Tiefpass auch nach der Puls-Amplituden-Modulation erfolgen? (4 P)
Bei der Abtastung von zeitkontinuierlichen Signalen muss sichergestellt werden, dass die maximale im Signal vorhandene Frequenz f_{max} kleiner ist als die halbe Abtastfrequenz $f_a/2$. Sind Anteile oberhalb dieser Grenze vorhanden, überlagern sich diese mit den Anteilen unterhalb dieser Grenze. Dieser Effekt wird Aliasing genannt. Ein Frequenzanteil bei $f_a/2 + \Delta f$ würde nach der Abtastung wieder bei $f_a/2 - \Delta f$ auftauchen.
Nein, denn das Aliasing tritt bei der Abtastung auf.

(e) Geben Sie das Spektrum $X_{\text{tp}}(j\omega) = \mathcal{F}\{x_{\text{tp}}(t)\}$ in Abhängigkeit von $X_{\text{m}}(j\omega)$ an. Für die Grenzfrequenz des Tiefpassfilters gilt $f_c = \omega_g/(2\pi)$. Skizzieren Sie das Spektrum $X_{\text{tp}}(j\omega)$ mit allen Achsenbeschriftungen. (3 P)
Die Definition der Rechteckfunktion benutzen.

$$X_{\text{tp}}(j\omega) = X_{\text{m}}(j\omega)\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_g}\right).$$



(f) Geben Sie das Signal $x(t)$ in Abhängigkeit von $x_{\text{tp}}(t)$ an. (3 P)
Die Abtastung in dem oben dargestellten System entspricht einer Multiplikation des Eingangsignals x_{tp} mit einem Impulskamm $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - nT\text{a})$.

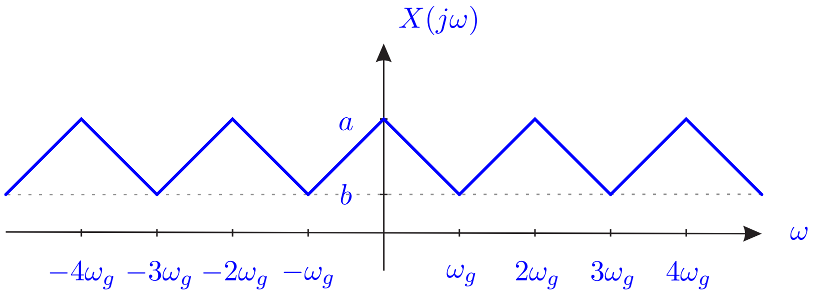
$$\begin{aligned} x(t) = x_{\text{tp}}(t) \cdot p(t) = x_{\text{tp}}(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - nT\text{a}), \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{\text{tp}}(t)\delta_0(t - nT\text{a}), \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{\text{tp}}(nT_{\text{a}})\delta_0(t - nT\text{a}). \end{aligned}$$

(g) Geben Sie das Spektrum $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ in Abhängigkeit von $X_{\text{tp}}(j\omega)$ an. (3 P)
Multiplikation im Zeitbereich entspricht einer Faltung im Frequenzbereich.

$$x(t) = x_{\text{tp}} \cdot p(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(j\omega) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} X_{\text{tp}}\left(j\left(\omega - \mu\frac{2\pi}{T_{\text{a}}}\right)\right).$$

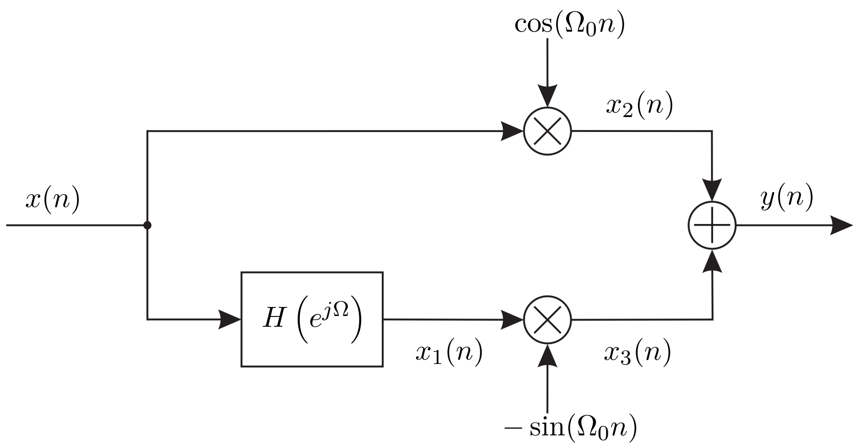
(h) Skizzieren Sie das Spektrum $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ im Intervall $\omega \in [-2\omega_{\text{a}},\ 2\omega_{\text{a}}]$ für (2 P)

$T_{\mathrm{a}} = \pi/\omega_g$.

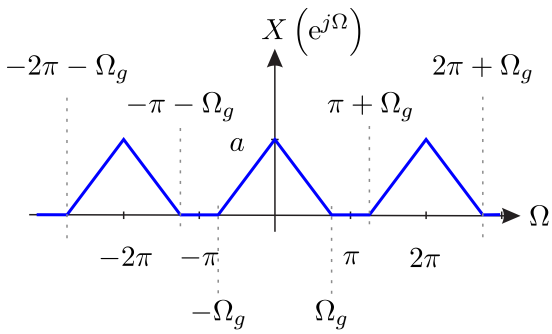


Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.*

Gegeben sei das nachfolgende System



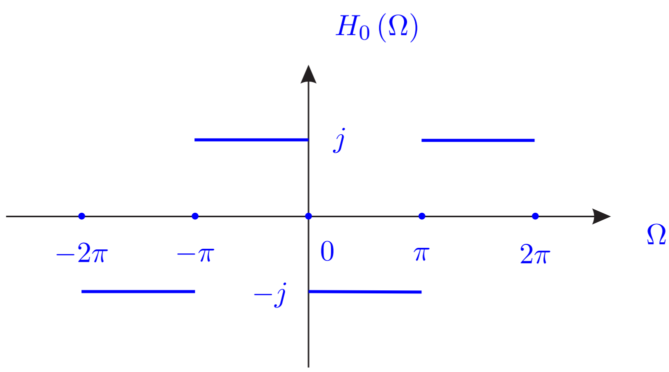
wobei $H\left(e^{j\Omega}\right)$ der zeitdiskrete, nullphasige Hilbert-Transformator ist. Das Eingangssignal $x(n)$ besitzt das nachfolgende 2π-periodische Spektrum:



(i) Geben Sie die allgemeine Definition der zeitdiskreten Hilbert-Transformation und skizzieren Sie deren Frequenzgang im Intervall $-2\pi < \Omega < 2\pi$. Beschriften Sie alle Achsen. (4 P)

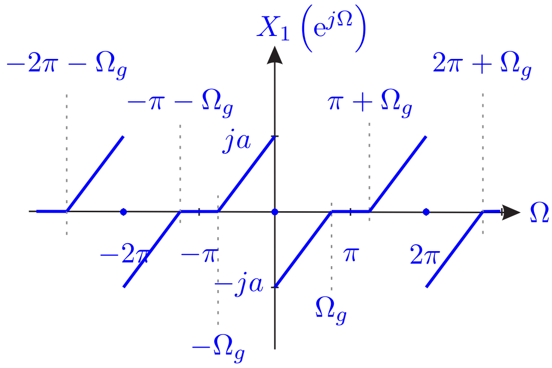
$$H\left(e^{j\Omega}\right) = H_0(\Omega)\mathrm{e}^{-j\Omega n_0},$$
$$\text{mit } H_0(\Omega) = -j\mathrm{sign}\left(\mathrm{mod}(\Omega+\pi, 2\pi) - \pi\right),$$

wobei n_0 für die zeitliche Verzögerung steht.



(j) Skizzieren Sie das Spektrum $X_1\left(e^{j\Omega}\right)$ des Signals $x_1(n)$ im Intervall $-2\pi < \Omega < 2\pi$. (2 P)

Realteil von $X_1\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$ ist null, da nullphasig.



(k) Geben Sie das Spektrum $X_2\left(e^{j\Omega}\right)$ des Signals $x_2(n)$ in Abhängigkeit von $X\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$ an. (2 P)

$$X_2\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) = \frac{1}{2}\left[X\left(\mathrm{e}^{j(\Omega-\Omega_0)}\right) + X\left(\mathrm{e}^{j(\Omega+\Omega_0)}\right)\right].$$

(l) Geben Sie das Spektrum $X_3\left(e^{j\Omega}\right)$ des Signals $x_3(n)$ in Abhängigkeit von $X\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$ an. (2 P)

$$\begin{aligned} X_3\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) &= \frac{1}{2j}\left[X_1\left(\mathrm{e}^{j(\Omega-\Omega_0)}\right) - X_1\left(\mathrm{e}^{j(\Omega+\Omega_0)}\right)\right], \\ &= \frac{1}{2j}\Big[-X\left(\mathrm{e}^{j(\Omega-\Omega_0)}\right) j\mathrm{sign}\Big(\mathrm{mod}(\Omega-\Omega_0+\pi, 2\pi)-\pi\Big) \\ &\qquad ... + X\left(\mathrm{e}^{j(\Omega+\Omega_0)}\right) j\mathrm{sign}\Big(\mathrm{mod}(\Omega+\Omega_0+\pi, 2\pi)-\pi\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Dies ist eine leere Seite.