Signale und Systeme II

Modulklausur WS 2018

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Datum:	25.02.2019
Name:	______________________________
Matrikelnummer:	______________________________

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.
Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________________

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/37	/33	/30

Summe der Punkte: ________________ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

- ☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ________________ Unterschrift: ______________________________

Signale und Systeme II

Modulklausur WS 2018

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort:	CAP2 - Frederik-Paulsen-Hörsaal
Datum:	25.02.2019
Beginn:	09:00 h
Einlesezeit:	10 Minuten
Bearbeitungszeit:	90 Minuten

Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien abzulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (37 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.*

(a) Welchem Zweck dient die Modulation eines Signals? Schreiben Sie in einem Satz. (2 P)
Die Modulation dient der Anpassung des Signalspektrums an den Frequenzgang des Übertragungsmediums.

(b) Ein bandbegrenztes Signal $x(n)$ wird mit einem Sinus-Modulationsterm $\sin(\Omega_T n)$ multipliziert. Geben Sie das Spektrum $Y\left(e^{j\Omega}\right)$ des Produktes der beiden Signale als Formel an. Um welche Modulationsart handelt es sich dabei? (3 P)

$$Y\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1}{2j}\left[X\left(e^{j(\Omega-\Omega_T)}\right) - X\left(e^{j(\Omega+\Omega_T)}\right)\right].$$

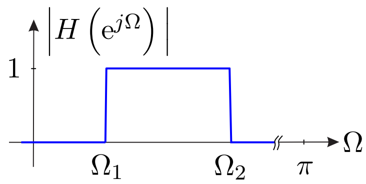
Es handelt sich um eine diskrete Zweiseitenband-Modulation.

(c) Welche Schritte müssen gemacht werden, um ein so moduliertes Signal wieder zu demodulieren? Beschreiben Sie in ganzen Sätzen. (3 P)
Im ersten Schritt wird das modulierte Signal mit dem Trägersignal multipliziert. Dadurch verschieben sich die Signalspektren wieder ins Basisband. Die unerwünschten Mischprodukte werden anschließend mit einem Tiefpassfilter entfernt.

(d) Welche Fehler können bei der Demodulation auftreten? (2 P)
Phasenfehler, Frequenzfehler

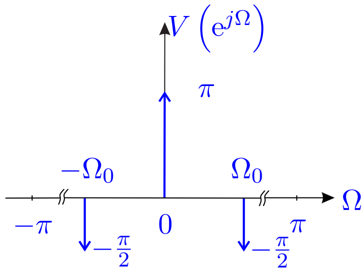
Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 3 gelöst werden.*

Ein Signal $v(n) = \sin^2\left(\frac{\Omega_0}{2}n\right)$ soll über einen Kanal mit reeller Impulsantwort und dem nachfolgend dargestellten Betragsfrequenzgang übertragen werden.



(e) Bestimmen Sie die Fouriertransformation $V\left(e^{j\Omega}\right) \bullet\!\!-\!\!\circ\, v(n)$ und skizzieren Sie $V\left(e^{j\Omega}\right)$ im Bereich von $-\pi$ bis π. Gehen Sie davon aus, dass $\Omega_0 < \Omega_1$. (5 P)

$$V\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{\pi}{2}\left[\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} 2\delta_0(\Omega - 2\pi\lambda) - \delta_0(\Omega + \Omega_0 - 2\pi\lambda) - \delta_0(\Omega - \Omega_0 - 2\pi\lambda)\right].$$



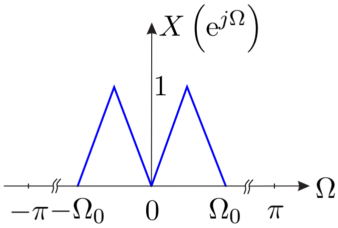
(f) Definieren Sie die Frequenz Ω_0 so, dass das Signal $v(n)$ bezüglich seiner Bandbreite über den Kanal übertragbar wäre. (2 P)

$$\Omega_0 \leq \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}$$

(g) Definieren Sie den Bereich für die Trägerfrequenz Ω_T so, dass die modulierte bzw. hochgemischte Version von $v(n)$ im Durchlassbereich des Kanals liegt. Nehmen Sie dabei an, dass Ω_0 in dem von *(f)* geforderten Bereich liegt. (2 P)

$$\Omega_1 + \Omega_0 \leq \Omega_T \leq \Omega_2 - \Omega_0.$$

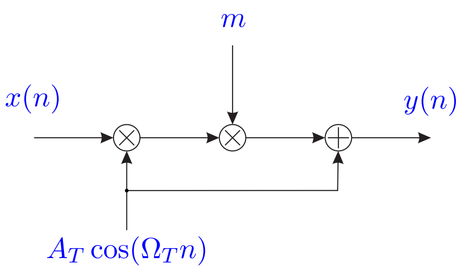
Nun soll das Signal $X\left(e^{j\Omega}\right) \bullet\!\!-\!\!\circ\; x(n)$ über den oben definierten Kanal gesendet werden.



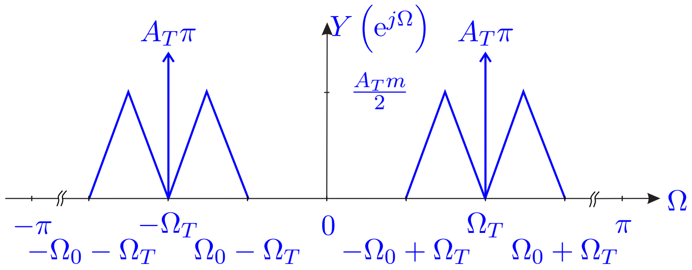
(h) Das Signal $x(n)$ soll amplitudenmoduliert werden. Schreiben Sie allgemein die Modulationsgleichung auf. Das Trägersignal soll dabei mit übertragen werden. (3 P)

$$y(n) = A_T\left[1 + mx(n)\right]\cos(\Omega_T n).$$

(i) Zeichnen Sie ein einfaches Blockschaltbild entsprechend der Gleichung aus *(h)*. (4 P)



(j) Skizzieren Sie das Spektrum des modulierten Signals aus *(h)* im Bereich von $-\pi$ bis π. Gehen Sie davon aus, dass $\Omega_0 + \Omega_T < \pi$. (4 P)



Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 2 gelöst werden.*

Aus der Vorlesung kennen Sie die Definition für die Winkelmodulation. Allgemein lässt sich die Winkelmodulation als die kontinuierliche Modulation eines Sinusträgers $c_\mathrm{T}(t)$ darstellen. Dabei steht $\theta(t)$ für den sich zeitlich veränderlichen Winkel (momentane Phase).

$$c_\mathrm{T}(t) = A_\mathrm{T} \sin\Big(\theta(t)\Big)$$

Gegeben ist die momentane Kreisfrequenz $\omega_m(t)$ eines frequenzmodulierten Trägers:

$$\omega_m(t) = \begin{cases} \omega_0 + k_\mathrm{FM}\sin(2\pi f_0 t), & \text{für } t \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(k) Berechnen Sie die zugehörige momentane Phase $\theta(t)$. (3 P)

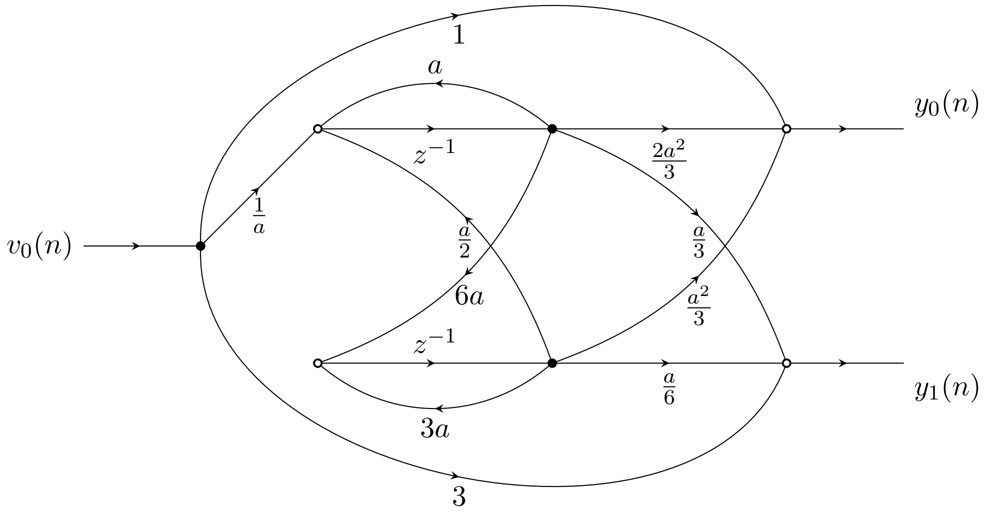
$$\begin{aligned} \theta(t) = \int_0^t \omega_m(\tau) d\tau &= \omega_0 t + k_\mathrm{FM} \int_0^t \sin(2\pi f_0 \tau) d\tau \\ &= \omega_0 t + k_\mathrm{FM}\Big(1 - \cos(2\pi f_0 t)\Big)\frac{1}{2\pi f_0}. \end{aligned}$$

(l) Nennen Sie jeweils die Vor- und Nachteile der Amplituden- und Winkelmodulation. (4 P)
Amplitudenmodulation ist einfach bei der Umsetzung, benötigt eine kleine Bandbreite und ist störanfälliger. Winkelmodulation benötigt eine große Bandbreite und ist komplizierter in der Umsetzung.

Aufgabe 2 (33 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.*

Für den folgenden Teil sei ein System gegeben, welches durch nachfolgenden Signalflussgraphen beschrieben ist.



Zudem seien folgende Gleichungen gegeben:

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{v}(n), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{v}(n). \tag{2}$$

(a) Geben Sie die Anzahl L der Eingänge, N der internen Zustände und R der Ausgänge des Systems an. (1 P)
$L = 1$ Eingänge, $N = 2$ Zustände, $R = 2$ Ausgänge.

(b) Wie werden die Gleichungen (1) und (2) genannt? Welche Einschränkungen gelten für Systeme, welche durch diese Gleichungen beschrieben werden können? (2 P)
Zustands- und Ausgangsgleichung.
Nur gültig für LTI (lineare zeitinvariante)-Systeme.

(c) Gegeben den Gleichungen (1) und (2): (3 P)

(i) Wie werden die vier Matrizen jeweils genannt (*nach Vorlesungskonvention*)?
$\boldsymbol{A}$ Systemmatrix, $\boldsymbol{B}$ Eingangsmatrix, $\boldsymbol{C}$ Ausgangsmatrix, $\boldsymbol{D}$ Durchgangsmatrix.

(ii) Welche Dimensionen besitzen diese für den oben angegebenen Signalflussgraphen?

$$\boldsymbol{A} \ : \ [N\text{x}N] = [2\text{x}2] \qquad \boldsymbol{B} \ : \ [N\text{x}L] = [2\text{x}1]$$
$$\boldsymbol{C} \ : \ [R\text{x}N] = [2\text{x}2] \qquad \boldsymbol{D} \ : \ [R\text{x}L] = [2\text{x}1]$$

(d) Bestimmen Sie die Matrizen/Vektoren/Skalare $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ für obiges System. (4 P)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & \frac{a}{2} \\ 6a & 3a \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \frac{2a^2}{3} & \frac{a^2}{3} \\ \frac{a}{3} & \frac{a}{6} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(e) Was muss für a gelten, damit das System stabil ist? (5 P)
Stabilität gegeben, wenn Pole im Einheitskreis: $\|z\| \leq 1$. Diese Aussage kann über das charakteristische Polynom getroffen werden. Die Nullstellen (d.h. Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$) entsprechen den Polen.

$$N(z) = \det(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} z-a & -\frac{a}{2} \\ -6a & z-3a \end{vmatrix} = (z-a)\ (z-3a) - 3a^2 = z^2 - 4az + 3a^2 - 3a^2$$

Es folgt $z_{\infty,0,1} = 2a \pm 2a \ \rightarrow \ z_{\infty,0} = 4a, \ z_{\infty,0} = 0$.
Mit $\|z\| \overset{!}{\leq} 1$ folgt $-\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{4}$.

(f) Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix des Systems. (6 P)
Mit:

$$\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{C}\,[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D},$$

und:

$$\boldsymbol{X}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{X})} \begin{bmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{x_{11}\,x_{22} - x_{12}\,x_{21}} \begin{bmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{bmatrix},$$

ergibt sich für die inverse Matrix $[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}$, wobei die Determinante aus dem vorigen Aufgabenteil übernommen werden kann:

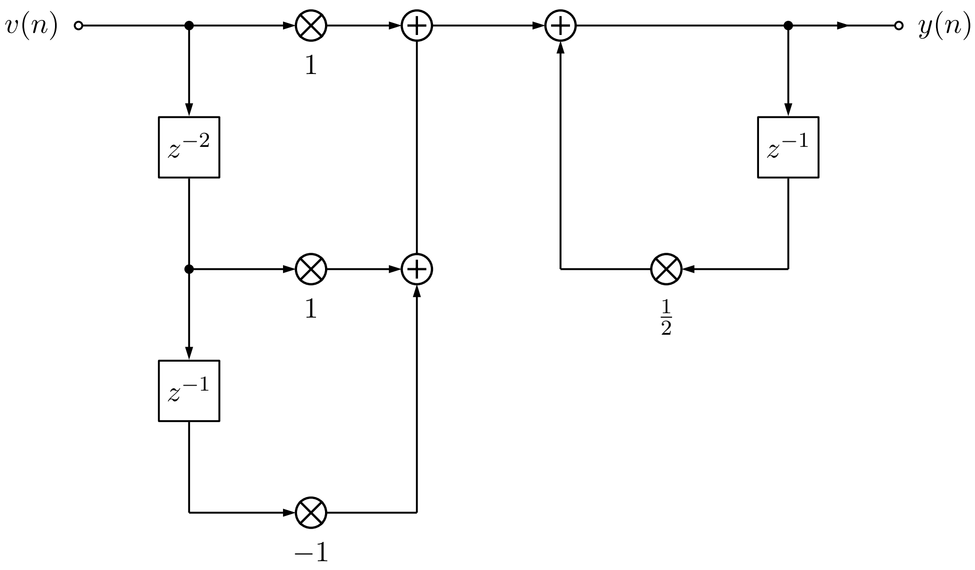
$$[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} z-a & -\frac{a}{2} \\ -6a & z-3a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z\,(z-4a)} \begin{bmatrix} z-3a & \frac{a}{2} \\ 6a & z-a \end{bmatrix}$$

Die Übertragungsmatrix berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}(z) &= \frac{1}{z\,(z-4a)} \begin{bmatrix} \frac{2a^2}{3} & \frac{a^2}{3} \\ \frac{a}{3} & \frac{a}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-3a & \frac{a}{2} \\ 6a & z-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{z\,(z-4a)} \begin{bmatrix} \frac{2a}{3}\,z \\ \frac{1}{3}\,z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\,\frac{a}{z-4a} + 1 \\ \frac{1}{3}\,\frac{1}{z-4a} + 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 3 gelöst werden.*

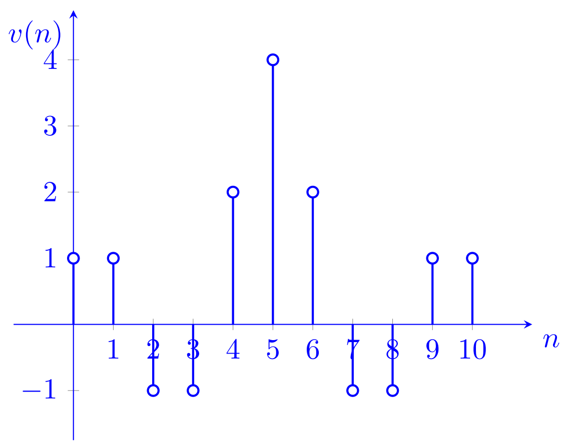
Für diesen Aufgabenteil sei ein System gegeben, welches durch nachfolgendes Blockschaltbild beschrieben ist. Es gelte ferner, dass alle Speicher für $n < 0$ mit 0 initialisiert seien und $y(n) = 0 \ \forall n < 0$.



Zunächst sei ein Signal $v(n)$ wie folgt definiert:

$$v(n) = \gamma_{-1}(n) - 2\,\gamma_{-1}(n-2) + 3\,\gamma_{-1}(n-4) + 2\,\gamma_0(n-5) - 3\,\gamma_{-1}(n-7) + 2\left[\gamma_0(n-9) + \gamma_0(n-10)\right] + \gamma_{-1}(n-11).$$

(g) Zeichnen Sie $v(n)$ für den exakten Bereich $0 \leq n < 11$. (2 P)



Nun werde das System mit

$$v(n) = \gamma_{-1}(n) - \gamma_{-1}(n-1)$$

angeregt.

(h) Bestimmen Sie das Ausgangssignal $y(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. (4 P)
Durch Rückkopplung einsetzen von Zahlenwerten nicht sinnvoll. Ablesen aus dem Blockschaltbild ergibt:

$$y(n) = \frac{1}{2}\, y(n-1) + v(n) + v(n-2) - v(n-3).$$

Kronecker-Delta als Eingangssignal:

$$v(n) = \gamma_{-1}(n) - \gamma_{-1}(n-1) = \gamma_0(n).$$

Differenzengleichung:

$$y(n) - \frac{1}{2}\, y(n-1) = v(n) + v(n-2) - v(n-3).$$

z-Bereichstransformation und $H(z) = Y(z)/V(z)$ liefern:

$$H(z) = \frac{1 + z^{-2} - z^{-3}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{z + z^{-1} - z^{-2}}{z - \frac{1}{2}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{z^{-1}}{z - \frac{1}{2}} - \frac{z^{-2}}{z - \frac{1}{2}}.$$

Zeitbereichstranformation mit bekannten Korrespondenzen liefert:

$$h_0(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \gamma_{-1}(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \gamma_{-1}(n-2) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \gamma_{-1}(n-3).$$

Da Anregung des Systems mit Impuls/Kronecker-Delta handelt es sich bei $y(n)$ um die Impulsantwort $y(n) = h_0(n)$

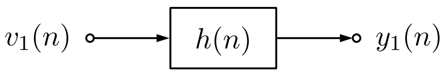
(i) Wie wird dieses spezielle Ausgangssignal genannt? Begründen Sie! (1 P)
Impulsantwort, da effektiv mit $\gamma_0(n)$ angeregt wird

Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 2 gelöst werden.*

Es sei nun das Ausgangssignal

$$y_1(n) = \gamma_0(n) + a^n\ \gamma_{-1}(n-2) + b\ \gamma_{-1}(n-4)$$

gegeben. Des Weiteren gelte $v_1(n) = \gamma_{-1}(n)$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 1$.



(j) Bestimmen Sie $H(z)|_{z=1}$. (4 P)
Da das Eingangssignal des Systems die Sprungfolge ist, beschreibt das zugehörige Ausgangssignal die Sprungantwort des Systems.

$$y_1(n) = h_{-1}(n).$$

Somit kann zum Bestimmen von $H(z)|_{z=1}$ folgender bekannter Grenzwertsatz verwendet werden:

$$H(z)|_{z=1} = \lim_{n\to\infty} h_{-1}(n) = b,$$

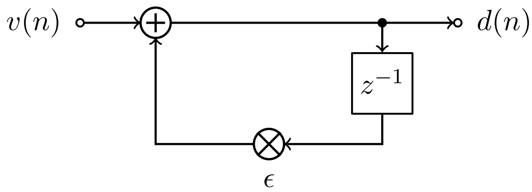
da $\lim_{n\to\infty} \gamma_{-1}(n) = 1$, $\lim_{n\to\infty} a = 0$ für $a < 1$.

(k) Was beschreibt $H(z)|_{z=1}$? (1 P)
Es beschreibt den Gleichanteil des Systems, da $z = \rho\ \exp\{j\Omega\} \underset{\Omega=0}{=} 1$.

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben ist das folgende System mit reeller Impulsantwort $h_0(n)$ und einer reellen Konstanten $|\epsilon| < 1$:



Im Folgenden wird das System mit mittelwertfreiem, weißen Rauschen der Leistung σ_v^2 angeregt. **Hinweis**: Verwenden Sie die statistischen Definitionen der geforderten Größen.

(a) Geben Sie die Autokorrelationsfunktion des Prozesses $v(n)$ an. (1 P)

$$s_{vv}(\kappa) = \sigma_v^2 \cdot \gamma_0(\kappa)$$

(b) Berechnen Sie die Leistung des Prozesses $d(n)$ in Abhängigkeit von σ_v^2. (3 P)
Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} m_d^{(2)} &= E\Big\{d^2(n)\Big\} = E\Big\{[v(n) + \epsilon d(n-1)]^2\Big\} \\ &= E\Big\{v^2(n)\Big\} + 2\epsilon \cdot E\Big\{v(n)d(n-1)\Big\} + \epsilon^2 \cdot E\Big\{d^2(n-1)\Big\} \\ &= \sigma_v^2 + 0 + \epsilon^2 m_d^{(2)} \end{aligned}$$

Daraus folgt $m_d^{(2)} = \frac{\sigma_v^2}{1-\epsilon^2}$.

(c) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $s_{dd}(\kappa)$ von $d(n)$ an den Stellen $\kappa = 1, 2$. (4 P)

$$s_{dd}(1) = E\Big\{d(n)d(n-1)\Big\} = E\Big\{[v(n) + \epsilon d(n-1)]d(n-1)\Big\} = \epsilon m_d^{(2)}$$

$$s_{dd}(2) = E\Big\{d(n)d(n-2)\Big\} = E\Big\{[v(n) + \epsilon[v(n-1) + \epsilon d(n-2)]]d(n-2)\Big\} = \epsilon^2 m_d^{(2)}$$

(d) Geben Sie anhand Ihrer Erkenntisse aus *(b,c)* die Funktion $s_{dd}(\kappa)$ für alle κ an. (2 P)

$$s_{dd}(\kappa) = m_d^{(2)} \cdot \epsilon^{|\kappa|} = \frac{\sigma_v^2}{1-\epsilon^2} \cdot \epsilon^{|\kappa|}$$

(e) Welche Wirkung hat das System auf $v(n)$? Was genau wird durch ϵ gesteuert? (2 P)
Das System macht aus weißem Rauschen farbiges Rauschen, das heißt das System bringt Korrelation in das Signal. Mit dem Parameter ϵ kann gesteuert werden wie stark das farbige Rauschen korreliert sein soll.

(f) Bestimmen Sie $h_0(n) * h_0(-n)$. (3 P)
Es gilt $s_{dd}(\kappa) = s_{vv}(\kappa) * h_0(\kappa) * h_0(-\kappa) = \sigma_v^2 \cdot h_0(\kappa) * h_0(-\kappa)$.
Somit gilt $h_0(n) * h_0(-n) = \frac{\epsilon^{|n|}}{1-\epsilon^2}$.

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Gegeben sei die folgende Verbunddichte der reellen Zufallsvariablen x und y mit den reellen Konstanten α und β:

$$f_{xy}(x,y) = \delta_0\Big(x^2 + y^2 - 1\Big) \cdot \sin\Big(\varphi(x)\Big) \cdot \begin{cases} \alpha, & \text{für } y \geq 0, \\ \beta, & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Die gegebene Dichte ist durch den Diracstoß $\delta_0(\ldots)$ ausschließlich auf dem Einheitskreis der x-y-Ebene ungleich Null. Für die Menge der Koordinatenpaare des Einheitskreises ist das Argument $\varphi(x)$ zudem rein über die x-Koordinate und die Umkehrfunktion des Kosinus als

$$\varphi(x) = \arccos(x)$$

definiert, sodass hier $\varphi \in [0, \pi]$ gilt.

(g) Welche zwei grundsätzlichen Beschränkungen müssen für den Wertebereich der Konstanten α und β gelten? Begründen Sie! (2 P)
$\alpha, \beta \geq 0$ da Dichten an keinem Punkt negativ werden können; mindestens eine der Konstanten muss echt größer 0 sein, damit das Integral über die Dichte 1 annehmen kann.

(h) Berechnen Sie β unter der Bedingung, dass $\alpha = \frac{1}{6}$ gilt. (4 P)
Allgemein muss

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y) dx dy \stackrel{!}{=} 1$$

gelten. Wird der Ansatz über eine Koordinatentransformation gewählt, so kann das Integral als

$$\alpha \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \delta_0(r^2 - 1)\sin(\varphi) r dr d\varphi + \beta \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\infty} \delta_0(r^2 - 1)\sin(2\pi - \varphi) r dr d\varphi$$

geschrieben werden. Durch die Siebeigenschaft des Diracstoßes kann die Abhängigkeit von r direkt in Form von

$$\alpha \int_0^{\pi} \sin(\varphi) d\varphi + \beta \int_{\pi}^{2\pi} \sin(2\pi - \varphi) d\varphi$$

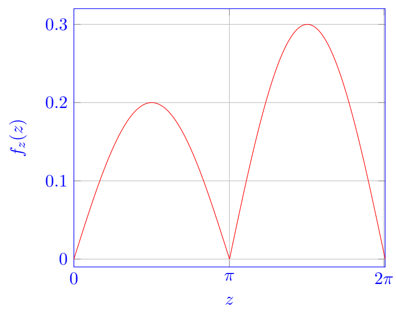
eliminiert werden. Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y) dx dy &= (\alpha + \beta) \int_0^{\pi} \sin(\varphi) d\varphi \\ &= (\alpha + \beta)\Big[-\cos(\varphi)\Big]_0^{\pi} \\ &= 2(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Daraus folgt $\beta = \frac{1}{3}$ nach obigem Ansatz. Der Lösungsweg ist auch ohne Durchführung der Koordinatentransformation vollständig, da das Integral durch die Angaben im Aufgabentext offensichtlich zu $(\alpha + \beta) \int_0^{\pi} \sin(\varphi) d\varphi$ zusammenfällt.

Nun sei eine neue Zufallsvariable $z \in [0, 2\pi)$ als die Phase einer aus den oben gegebenen Zufallsvariablen zusammengesetzten komplexen Zahl $c = x + jy$ definiert. Hierfür verwenden Sie im Folgenden bitte die Werte $\alpha = \frac{1}{5}$ und $\beta = \frac{3}{10}$.

(i) Skizzieren Sie die zugehörige Dichte $f_z(z)$. (3 P)



(j) Berechnen Sie das erste statistische Moment von z. (4 P)
Hinweis: $\int g \sin(g)\, dg = \sin(g) - g\cos(g) + C$.

$$
\begin{aligned}
E\{z\} &= \int_0^{2\pi} z f_z(z) dz = \int_0^{\pi} z \frac{1}{5} \sin(z) dz - \int_{\pi}^{2\pi} z \frac{3}{10} \sin(z) dz \\
&= \frac{1}{5}\Big[\sin(z) - z\cos(z)\Big]_0^{\pi} - \frac{3}{10}\Big[\sin(z) - z\cos(z)\Big]_{\pi}^{2\pi} \\
&= \frac{1}{5}[0 + \pi - 0 - 0] - \frac{3}{10}[0 - 2\pi - 0 - \pi] = \frac{11}{10}\pi
\end{aligned}
$$

Zusätzlich sei der stochastische Prozess $\gamma = \sin(z + 3\pi \cdot t)$ mit kontinuierlicher Zeitvariable $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

(k) Ist der Prozess γ ergodisch? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 P)
Da z nicht gleichverteilt ist, ist der Schaarmittelwert abhängig von der Zeit und (mit Ausnahme bestimmter periodischer Zeitpunkte) ungleich Null. Der Zeitmittelwert hingegen ist immer Null unabhängig von der Realisierung des Prozesses. Folglich ist der Prozess nicht ergodisch.

Dies ist eine leere Seite.