Signale und Systeme II

Modulklausur SS 2018

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

Datum: 27.09.2018

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.
Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________________

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/33	/33	/34

Summe der Punkte: ____________________ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

- ☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ____________________ Unterschrift: ______________________________

Signale und Systeme II

Modulklausur SS 2018

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Datum:	27.09.2018
Zeit:	09:00 h – 10:30 h (90 Minuten)
Ort:	LS1 - Klaus-Murmann-Hörsaal

Hinweise

- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**.
- Legen Sie Ihren Studentenausweis und Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Die Aufgaben dürfen erst bearbeitet werden, wenn alle Teilnehmer die Aufgabenstellungen erhalten haben.
- Während der Klausur werden nur Fragen zur Aufgabenstellung beantwortet.
- Verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** einen **neuen** mit **Namen und Matrikelnummer** versehenen Papierbogen. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden.
- Verwenden Sie zum Schreiben weder Bleistift noch Rotstift.
- Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Blatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Mobiltelefone sind auszuschalten. Laptops, Tablets, Smartwatches und ähnliche Geräte sind nicht erlaubt, da sie als Kommunikationsmittel tauglich sind.
- Die Aufgaben und eine Lösung werden auf der Homepage der Vorlesung veröffentlicht. Dort werden ebenso Termin und Ort der Klausureinsicht bekanntgegeben.

Aufgabe 1 (33 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

Gegeben sei die Wahrscheinlichkeitsdichte einer reellen Zufallsgröße x mit den reellen Konstanten $\alpha, \beta > 0$ und der Eulerschen Zahl e:

$$f_x(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{|x|}{\beta}}.$$

(a) Geben Sie β in Abhängigkeit von α an. Begründen Sie Ihre Antwort! (2 P)
Die Zufallsgröße ist offensichtlich Laplace-verteilt. Damit folgt $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

(b) Berechnen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion $F_x(x)$ als Funktion von α und β. (5 P)
Es gilt allgemein:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\, dt$$

Somit berechnet die Verteilungsfunktion sich zu:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{|t|}{\beta}}\, dt$$

$x \leq 0$:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\alpha} e^{\frac{t}{\beta}}\, dt = \frac{1}{\alpha}\left[\beta e^{\frac{t}{\beta}}\right]_{-\infty}^{x} = \frac{\beta}{\alpha} e^{\frac{x}{\beta}}$$

$x > 0$:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\alpha} e^{\frac{t}{\beta}}\, dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{t}{\beta}}\, dt = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\left[-\beta e^{-\frac{t}{\beta}}\right]_{0}^{x} = 2\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}} = \frac{\beta}{\alpha}\left(2 - e^{-\frac{x}{\beta}}\right)$$

(c) Wie lässt sich Ihr Ergebnis aus (a) anhand Ihres Ergebnisses aus (b) überprüfen? (2 P)
Der Grenzwert der Verteilungsfunktion muss identisch 1 sein für $x \to \infty$. Man setze also das Ergebnis aus (a) in diesen Grenzwert ein und überprüft, ob dies zutrifft:

$$\lim_{x\to\infty} F_x(x) = 2\frac{\beta}{\alpha}$$
$$\left. 2\frac{\beta}{\alpha} \right|_{\beta=\frac{\alpha}{2}} = 1$$

Nun wird die folgende deterministische Abbildung der obigen Zufallsgröße betrachtet:

$$\gamma = 2e^{x} + 7$$

(d) Berechnen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte $f_\gamma(\gamma)$. (4 P)
Mit der Abbildungsfunktion $g(x) = 2e^{x} + 7$ und der zugehörigen Umkehrfunktion $h(\gamma) = \ln\left(\frac{\gamma-7}{2}\right)$ für $\gamma > 7$ gilt:

$$f_\gamma(\gamma) = \begin{cases} f_x\Big(h(\gamma)\Big)\Big|h'(\gamma)\Big| = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\left|\ln\left(\frac{\gamma-7}{2}\right)\right|}{\beta}} \cdot \left|\frac{1}{\gamma-7}\right|, & \text{für } \gamma > 7, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

Gegeben sei die reelle Zufallsgröße δ, welche über dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gleichverteilt und damit vollständig beschrieben ist. Zusätzlich sei eine komplexe deterministische Abbildung der Zufallsgröße gegeben:

$$\nu_1 = e^{j\delta} + 2$$

(e) Geben Sie sowohl die Wahrscheinlichkeitsdichte f_δ als auch die Verteilungsfunktion F_δ an. (3 P)

$$f_\delta(\delta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq \delta < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F_\delta(\delta) = \begin{cases} 0, & \text{für } \delta < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi}\delta + \frac{1}{2}, & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq \delta < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

(f) Berechnen Sie den Erwartungswert der Abbildung ν_1 jeweils getrennt für Real- und Imaginärteil. (4 P)
Es gilt $\mathrm{Re}\{\nu_1\} = \cos(\delta) + 2$ und $\mathrm{Im}\{\nu_1\} = \sin(\delta)$. Somit:

$$\mathrm{E}\Big\{\mathrm{Re}\{\nu_1\}\Big\} = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(\delta) + 2\Big) d\delta = \frac{1}{\pi}\Big[\sin(\delta) + 2\delta\Big]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}(1 + \pi + 1 + \pi) = 2 + \frac{2}{\pi}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\mathrm{Im}\{\nu_1\}\Big\} = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\delta)\, d\delta = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos(\delta)\Big]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Nun seien eine modifizierte Abbildung $\nu_2 = e^{j(\delta_1 + \delta_2)}$ und die dafür notwendige Verbunddichte definiert:

$$f_{\delta_1,\delta_2}(\delta_1, \delta_2) = \begin{cases} 0, & \text{für } \delta_1 < 0 \;\vee\; \delta_2 < 0 \;\vee\; \delta_1 \geq \pi \;\vee\; \delta_2 \geq \pi \\ \frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{\pi^3}\delta_1, & \text{sonst} \end{cases}$$

(g) Berechnen Sie den Erwartungswert des Realteiles der Abbildung ν_2. (5 P)
Hinweis: $\int x \sin(x)\, \mathrm{d}x = \sin(x) - x\cos(x) + C$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} \nu_2 = e^{j(\delta_1+\delta_2)} &= (\cos(\delta_1) + j\sin(\delta_1))\,(\cos(\delta_2) + j\sin(\delta_2)) \\ &= \cos(\delta_1)\cos(\delta_2) - \sin(\delta_1)\sin(\delta_2) + j\mathrm{Im}\{\nu_2\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big\{\mathrm{Re}\{\nu_2\}\Big\} &= \int_0^\pi \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{\pi^3}\delta_1\right)\cos(\delta_1)\int_0^\pi \cos(\delta_2)\,d\delta_2\,d\delta_1 \\
&\quad - \int_0^\pi \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{\pi^3}\delta_1\right)\sin(\delta_1)\int_0^\pi \sin(\delta_2)\,d\delta_2\,d\delta_1 \\
&= 0 - 2\int_0^\pi \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{\pi^3}\delta_1\right)\sin(\delta_1)\,d\delta_1 \\
&= \frac{4}{\pi^3}\int_0^\pi \delta_1\sin(\delta_1)\,d\delta_1 - \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi \sin(\delta_1)\,d\delta_1 \\
&= \frac{4}{\pi^3}\Big[\sin(\delta_1) - \delta_1\cos(\delta_1)\Big]_0^\pi - \frac{8}{\pi^2} \\
&= \frac{4\pi}{\pi^3} - \frac{8}{\pi^2} = -\frac{4}{\pi^2}
\end{aligned}
$$

Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.*

Nehmen Sie eine unkorrelierte, reelle Zufallsfolge $z(n)$ an. Die Größen m_z und σ_z sind jeweils Mittelwert und Standardabweichung des zugehörigen ergodischen Prozesses.

(h) Zeigen Sie, dass Folgendes für die Autokorrelationsfunktion gilt: (4 P)

$$s_{zz}(\kappa) = m_z^2 + \sigma_z^2 \cdot \gamma_0(\kappa).$$

Der folgende Lösungsweg zeigt eine Möglichkeit der Herleitung auf. Dafür werden die Folgen $z_1(n)$ und $z_2(n)$ definiert, welche die selben statistischen Eigenschaften wie $z(n)$ besitzen und unkorreliert voneinander sind.

$$
\begin{aligned}
s_{zz}(\kappa) &= \mathrm{E}\{z(n)\cdot z(n+\kappa)\} \\
&= \begin{cases} \mathrm{E}\{z^2(n)\}, & \text{für } \kappa = 0 \\ \mathrm{E}\{z_1(n)\cdot z_2(n)\}, & \text{für } \kappa \neq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathrm{E}\{z^2(n)\} - \mathrm{E}^2\{z(n)\} + \mathrm{E}^2\{z(n)\}, & \text{für } \kappa = 0 \\ \mathrm{E}\{z_1(n)\}\cdot\mathrm{E}\{z_2(n)\}, & \text{für } \kappa \neq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathrm{E}\{(z(n)-m_z)^2\} + m_z^2, & \text{für } \kappa = 0 \\ \mathrm{E}\{z(n)\}\cdot\mathrm{E}\{z(n)\}, & \text{für } \kappa \neq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sigma_z^2 + m_z^2, & \text{für } \kappa = 0 \\ m_z^2, & \text{für } \kappa \neq 0 \end{cases} \\
&= m_z^2 + \sigma_z^2\cdot\gamma_0(\kappa)
\end{aligned}
$$

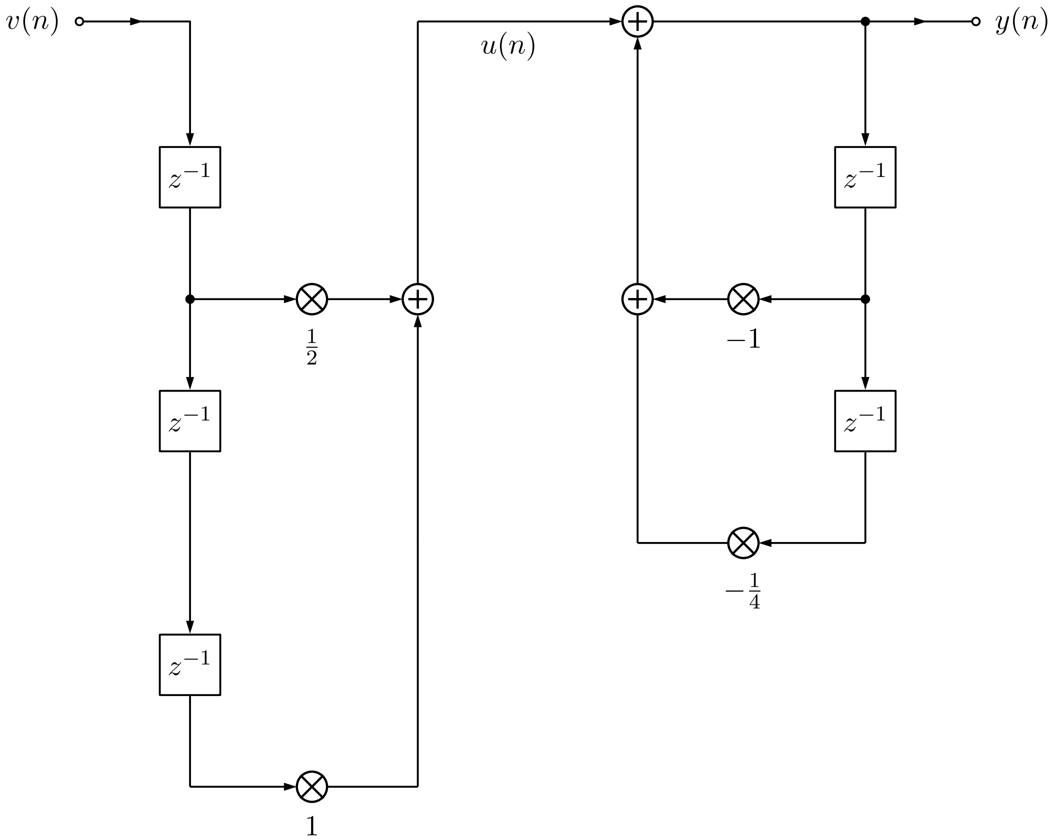
(i) Erklären Sie, inwiefern die Eigenschaften dieser Folge bei $m_z = 0$ praktisch für eine Systemidentifikation (Schätzung einer Impulsantwort) sind. Geben Sie dabei die notwendigen Schritte des Schätzverfahrens an. (4 P)
Zur Schätzung der Impulsantwort kann die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich mittels Leistungsdichtespektren geschätzt werden. Hier sind das Autoleistungs-

dichtspektrum des Eingangssignales $z(n)$ und entweder das Autoleistungsdichtespektrum des Ausgangssignales (Schätzung ohne Phase) oder das Kreuzleistungsdichtespektrum zwischen Ein- und Ausgangssignal (Schätzung mit Phase) zu berechnen. Durch Umstellung der bekannten Formeln kann die Übertragunsfunktion berechnet werden. Das Signal $z(n)$ ist hier praktisch, da es sich um mittelwertfreies, weißes Rauschen handelt und somit keine Nulldivison stattfinden kann. Zusätzlich reduziert sich die frequenzselektive Division zu einer Skalierung des gesamten Spektrums. Alternativ kann die Impulsantwort auf direktem Weg im Zeitbereich geschätzt werden, wo die Berechnung einer Skalierung der Kreuzkorrelationsfunktion zwischen Ein- und Ausgangssignal gleichkommt.

Aufgabe 2 (33 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei nachfolgendes Blockschaltbild. Es seien alle Speicher für $n < 0$ mit 0 initialisiert.



Ferner sei das Eingangssignal wie folgt definiert:

$$v(n) = [\gamma_{-1}(n+2) - \gamma_{-1}(n-2)] \cdot \gamma_0(n-3) + \gamma_0(n) + \gamma_{-1}(n-2) - 2\gamma_{-1}(n-4) \\ + 3\gamma_0(n-5) + \gamma_{-1}(n-7) + \gamma_0(n-8) \cdot \gamma_{-1}(n-9).$$

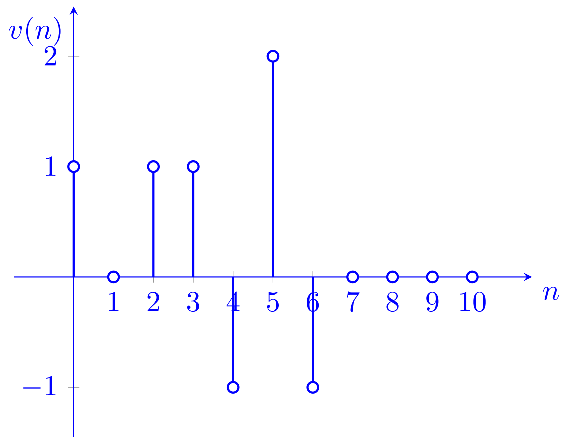
(a) Welche Form besitzt das oben angegebene Blockschaltbild? (1 P)
Direktform I.

(b) Zeichnen Sie $v(n)$ für $0 \leq n < 11$. (2 P)
$v(n)$ kann durch die Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion $\gamma_0(n)$ vereinfacht werden:

$$v(n) = \gamma_0(n) + \gamma_{-1}(n-2) - 2\gamma_{-1}(n-4) + 3\gamma_0(n-5) + \gamma_{-1}(n-7)$$

Für $0 \leq n < 11$ ergeben sich für $\boldsymbol{v} = [v(0), v(1), v(2), \ldots, v(10)]^{\mathrm{T}}$ die Werte:

$$\boldsymbol{v} = [1,\ 0,\ 1,\ 1,\ -1,\ 2,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}$$



(c) Geben Sie die Folge $u(n)$ unter Berücksichtigung der Werte für $v(n)$ für die Zeitpunkte $0 \leq n < 11$ an. (3 P)

Mit $\boldsymbol{v}$ und:

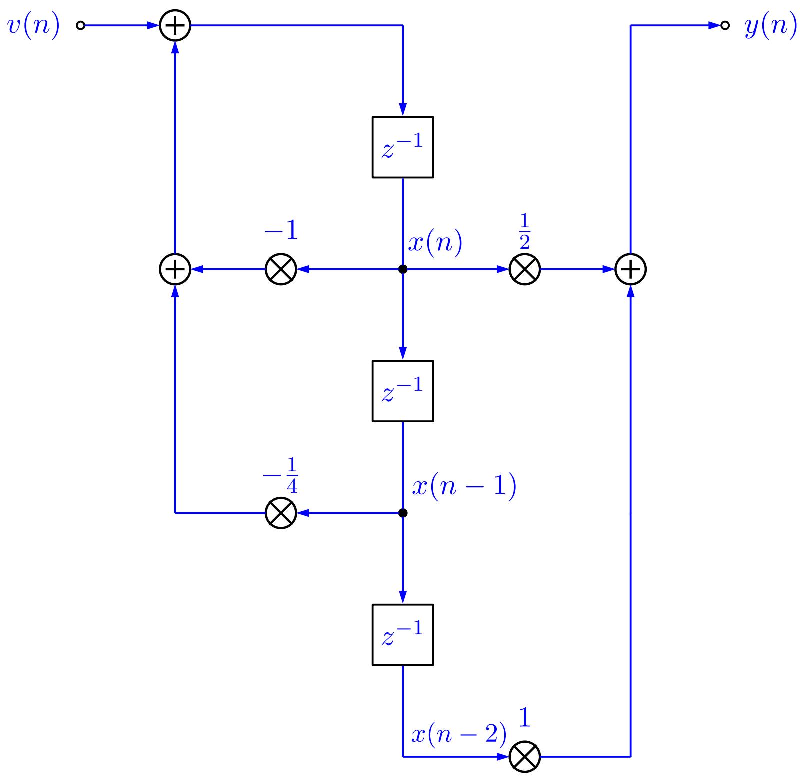
$$u(n) = \frac{1}{2}\, v(n-1) + v(n-3),$$

folgt $\boldsymbol{u} = [u(0), u(1), u(2), \ldots, u(10)]^{\mathrm{T}}$:

$$\boldsymbol{u} = \left[0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2,\ -\frac{3}{2},\ 2,\ -1,\ 0\right]^{\mathrm{T}}.$$

(d) Zeichnen Sie die Direktform II und nennen Sie einen Vorteil gegenüber der oben verwendeten Form. (4 P)

Die Direktform II benötigt weniger Zustandsspeicher als die Direktform I (in diesem Fall drei) und ergibt sich zu:



(e) Wie viele Zustände besitzt das System? (1 P)
Kennzeichnen Sie diese in Ihrer Lösung aus *(d)*.
Drei Zustände (Kennzeichnung siehe Lsg. für vorigen Aufgabenteil, $x(n), x(n-1), x(n-2)$).

(f) Bestimmen Sie die Impulsantwort für das gesamte System. (7 P)

$$y(n) = u(n) - y(n-1) - \frac{1}{4}y(n-2)$$

$$y(n) + y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2) = \frac{1}{2}v(n-1) + v(n-3)$$

Im z-Bereich folgt:

$$\left(1 + z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}\right)\ Y(z) = \left(\frac{1}{2}z^{-1} + z^{-3}\right)\ V(z).$$

Und somit:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{\frac{1}{2}z^{-1} + z^{-3}}{1 + z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{\frac{1}{2}z + z^{-1}}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2}$$
$$= -\frac{-\frac{1}{2}z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} - 2z^{-2}\frac{-\frac{1}{2}z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Durch Anwenden der bekannten Korrespondenz der Z-Transformation aus der Formelsammlung der Vorlesung ($x(n) = na^n \gamma_{-1}(n)$, $X(z) = \frac{za}{(z-a)^2}$) folgt:

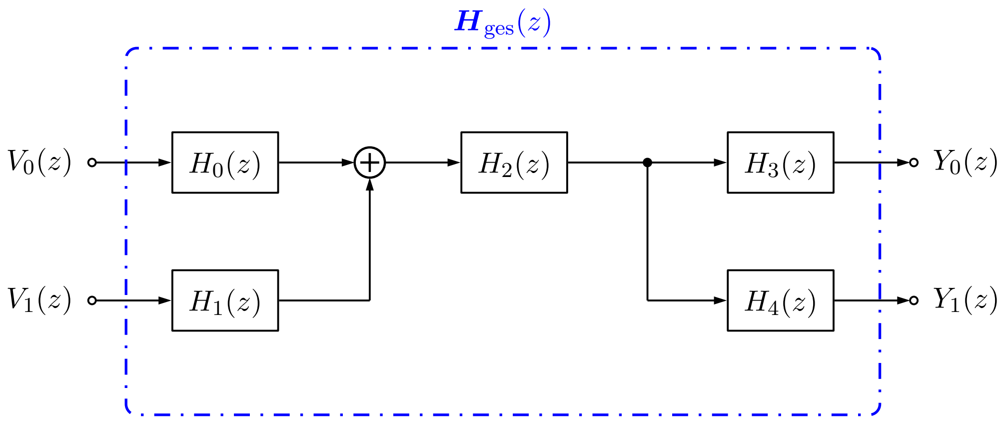
$$h(n) = -n \left(-\frac{1}{2}\right)^n \gamma_{-1}(n) \; - 2\,(n-2) \left(-\frac{1}{2}\right)^{(n-2)} \gamma_{-1}(n-2)$$

(g) Welcher Teil des oben angegebenen Blockschaltbildes besitzt eine FIR-Charakteristik und welcher Teil eine IIR-Charakteristik? (Begründen Sie!) (3 P)

- **Teil 1** mit Eingang $v(n)$ und Ausgang $u(n)$ (transversale Struktur) besitzt eine *FIR*-Charakteristik (keine Rückkopplung des Ausgangssignals $u(n)$).
- **Teil 2** mit Eingang $u(n)$ und Ausgang $y(n)$ (rekursive Struktur) besitzt eine *IIR*-Charakteristik (Rückkopplung des Ausgangssignals $y(n)$).

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Es sei nun nachfolgendes System gegeben:



(h) Bestimmen Sie $\boldsymbol{H}_{\text{ges}}(z)$ in abh. von $H_i(z)$, $i \in [0, 1, 2, 3, 4]$. Was beschreiben die einzelnen Elemente von $\boldsymbol{H}_{\text{ges}}(z)$? (5 P)

Es seien $\boldsymbol{V}(z) = [V_0(z), V_1(z)]^{\mathrm{T}}$ und $\boldsymbol{Y}(z) = [Y_0(z), Y_1(z)]^{\mathrm{T}}$, wobei $V_i(z)$ die z-Transformation von $v_i(n)$ beschreibt und $Y_j(z)$ jene von $y_j(n)$ mit $i, j \in [0, 1]$.

$$\boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{H}_{\text{ges}}(z)\; \boldsymbol{V}(z) = \begin{bmatrix} H_{0,0}(z) & H_{0,1}(z) \\ H_{1,0}(z) & H_{1,1}(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_0(z) \\ V_1(z) \end{bmatrix}$$

$H_{i,j}$ beschreibt somit den Einfluss von Eingang v_i auf Ausgang y_j. Somit ergibt sich:

$$\boldsymbol{H}_{\text{ges}}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z)H_2(z)H_3(z) & H_1(z)H_2(z)H_3(z) \\ H_0(z)H_2(z)H_4(z) & H_1(z)H_2(z)H_4(z) \end{bmatrix}$$

Es werde nun lediglich der Übertragungspfad von $V_0(z)$ auf $Y_0(z)$ betrachtet. Außerdem gelte:

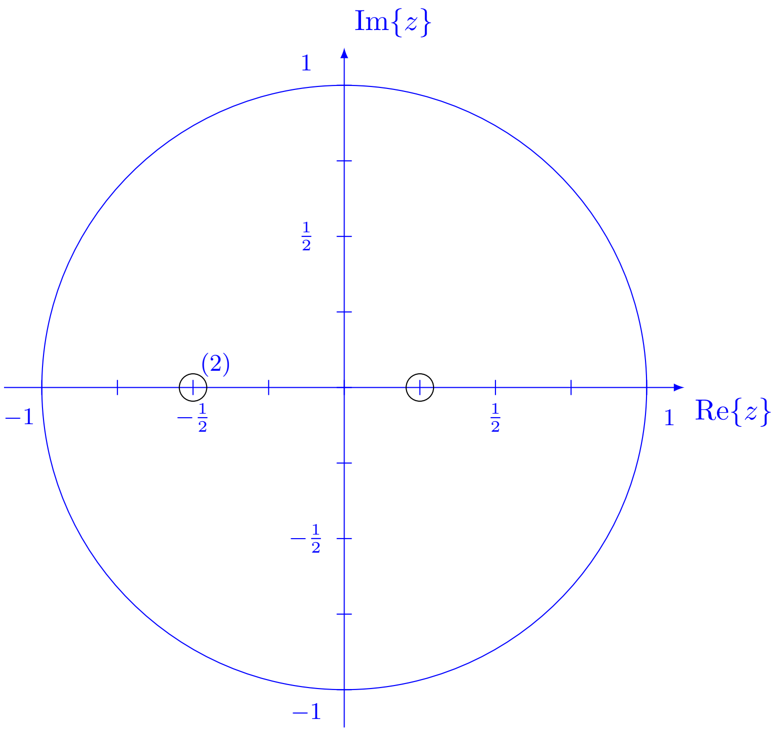
$$H_0(z) = \frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)^3}{z-\frac{1}{4}}, \qquad H_1(z) = \frac{z}{z^2-4}, \qquad H_2(z) = \frac{z+\frac{1}{2}}{z^2+\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}},$$

$$H_3(z) = \frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^3}{z+\frac{1}{2}}, \qquad H_4(z) = \frac{1}{\left(z-\frac{3}{4}\right)^3}.$$

(i) Zeichnen Sie das Pol/Nullstellen Diagramm für den betrachteten Übertragungspfad. (4 P)

$$\begin{aligned}
H_{0,0}(z) &= H_0(z)\ H_2(z)\ H_3(z) \\
&= \frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)^3}{z-\frac{1}{4}}\ \frac{z+\frac{1}{2}}{z^2+\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}}\ \frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^3}{z+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)^3}{z-\frac{1}{4}}\ \frac{z+\frac{1}{2}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\ \frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^3}{z+\frac{1}{2}} \\
&= \left(z+\frac{1}{2}\right)^2\ \left(z-\frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

Doppelte Nullstelle bei $z_{0,(1,2)} = -\frac{1}{2}$, einfache Nullstelle bei $z_{0,3} = \frac{1}{4}$. Somit ergibt sich nachfolgendes Pol-/Nullstellendiagramm:



(j) Ist das betrachtete Teilsystem: (3 P)

(i) stabil,
Ja das System ist stabil, da keine Polstelle außerhalb des Einheitskreises liegt.

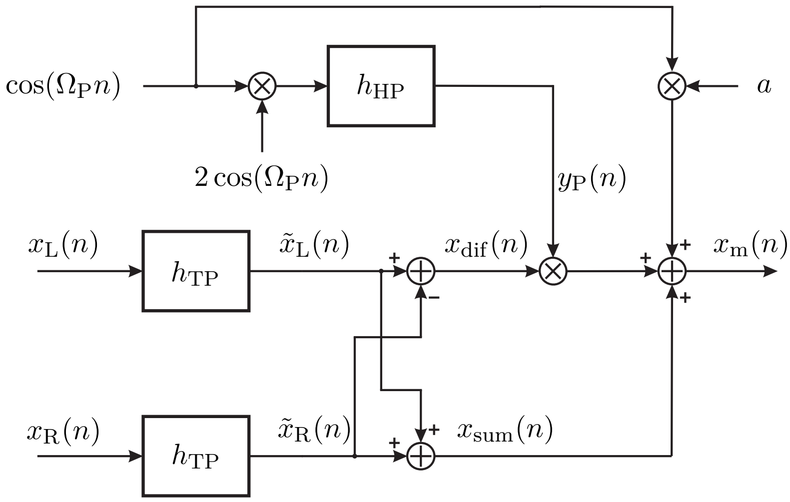
(ii) kausal,
Nein, da Zählergrad ($M = 3$) größer als Nennergrad ($N = 0$) und somit der Ausgang $y(n)$ von zukünftigen Eingangswerten $v(n)$ abhängt.

(iii) minimalphasig?
Ja, da alle Nullstellen im Einheitskreis liegen.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (34 Punkte)

Gegeben ist das folgende Blockschaltbild zur Erzeugung eines „Stereo-Basisbandsignals“,



wobei es sich bei h_{TP} um ein ideales Tiefpass- und bei h_{HP} um ein ideales Hochpassfilter handelt. Die Grenzfrequenzen der Filter liegen identisch bei Ω_C und es gilt: $\Omega_C < \Omega_P$.

Vereinfachen Sie im Folgenden alle Ihre Lösungen unter Verwendung bekannter Theoreme soweit wie möglich.

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.*

(a) Geben Sie das Signal $y_P(n)$ an. Keine Faltung notwendig! (3 P)
Durch den idealen Filter h_{HP} wird der durch die Multiplikation entstandene Gleichanteil entfernt.

$$y_P(n) = [2\cos(\Omega_P n) \cdot \cos(\Omega_P n)] * h_{HP}(n) = [1 + \cos(2\Omega_P n)] * h_{HP}(n) = \cos(2\Omega_P n).$$

(b) Geben Sie das Ausgangssignal $x_m(n)$ in Abhängigkeit von $\tilde{x}_L(n)$ und $\tilde{x}_R(n)$ an. (3 P)

$$x_m(n) = \tilde{x}_L(n) + \tilde{x}_R(n) + [\tilde{x}_L(n) - \tilde{x}_R(n)]\cos(2\Omega_P n) + a\cos(\Omega_P n)$$

(c) Berechnen Sie die Fouriertransformation von Ihrem Ergebnis aus *(b)*. (4 P)

$$
\begin{aligned}
X_\mathrm{m}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) &= \tilde{X}_\mathrm{L}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) + \tilde{X}_\mathrm{R}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\left[\tilde{X}_\mathrm{L}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) - \tilde{X}_\mathrm{R}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)\right] \circledast \left(\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\gamma_0(\Omega - 2\Omega_\mathrm{P} - 2\pi k) + \gamma_0(\Omega + 2\Omega_\mathrm{P} - 2\pi k)\right]\right) \\
&\quad + a\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\gamma_0(\Omega - \Omega_\mathrm{P} - 2\pi k) + \gamma_0(\Omega + \Omega_\mathrm{P} - 2\pi k)\right] \\
&= \tilde{X}_\mathrm{L}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) + \tilde{X}_\mathrm{R}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) + \frac{1}{2}\left[\tilde{X}_\mathrm{L}\left(\mathrm{e}^{j\Omega - 2\Omega_\mathrm{P}}\right) + \tilde{X}_\mathrm{L}\left(\mathrm{e}^{j\Omega + 2\Omega_\mathrm{P}}\right)\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[\tilde{X}_\mathrm{R}\left(\mathrm{e}^{j\Omega - 2\Omega_\mathrm{P}}\right) + \tilde{X}_\mathrm{R}\left(\mathrm{e}^{j\Omega + 2\Omega_\mathrm{P}}\right)\right] \\
&\quad + a\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\gamma_0(\Omega - \Omega_\mathrm{P} - 2\pi k) + \gamma_0(\Omega + \Omega_\mathrm{P} - 2\pi k)\right]
\end{aligned}
$$

(d) Geben Sie allgemein das Leistungsdichtespektrum $S_{x_{dif}x_{dif}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$ in Abhängigkeit von den Eingangsgrößen an. Gehen Sie davon aus, dass die Signale $x_\mathrm{L}(n)$ und $x_\mathrm{R}(n)$ im Durchlassbereich des Tiefpassses $h_\mathrm{TP}(n)$ liegen. (4 P)

$$
\begin{aligned}
s_{x_\mathrm{dif}x_\mathrm{dif}}(\kappa) &= \mathrm{E}\left\{x_\mathrm{dif}(n)x^*_\mathrm{dif}(n+\kappa)\right\} \\
&= \mathrm{E}\left\{\left[x_\mathrm{L}(n) - x_\mathrm{R}(n)\right]\left[x_\mathrm{L}(n+\kappa) - x_\mathrm{R}(n+\kappa)\right]^*\right\} \\
&= \mathrm{E}\left\{x_\mathrm{L}(n)x^*_\mathrm{L}(n+\kappa) - x_\mathrm{R}(n)x^*_\mathrm{L}(n+\kappa) - x_\mathrm{L}(n)x^*_\mathrm{R}(n+\kappa) + x_\mathrm{R}(n)x^*_\mathrm{R}(n+\kappa)\right\}
\end{aligned}
$$

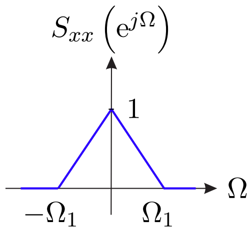
$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$
\begin{aligned}
S_{x_\mathrm{dif}x_\mathrm{dif}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) &= S_{x_\mathrm{L}x_\mathrm{L}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) - S_{x_\mathrm{R}x_\mathrm{L}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) - S_{x_\mathrm{L}x_\mathrm{R}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) + S_{x_\mathrm{R}x_\mathrm{R}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) \\
&= S_{x_\mathrm{L}x_\mathrm{L}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) - S_{x_\mathrm{R}x_\mathrm{L}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) - S^*_{x_\mathrm{R}x_\mathrm{L}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) + S_{x_\mathrm{R}x_\mathrm{R}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) \\
&= S_{x_\mathrm{L}x_\mathrm{L}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) - 2\mathrm{Re}\left\{S_{x_\mathrm{R}x_\mathrm{L}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)\right\} + S_{x_\mathrm{R}x_\mathrm{R}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)
\end{aligned}
$$

(e) Ist das Leistungsdichtespektrum $S_{x_{dif}x_{dif}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$ komplex oder reell? (1 P)

Autoleistungsdichtespektren sind immer reell. Das Leistungsdichtespektrum $S_{x_{dif}x_{dif}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$ enthält zwar zwei komplexe Kreuzterme $-S_{x_\mathrm{R}x_\mathrm{L}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$ und $-S_{x_\mathrm{L}x_\mathrm{R}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$, diese sind jedoch konjugiert komplex zu einander.

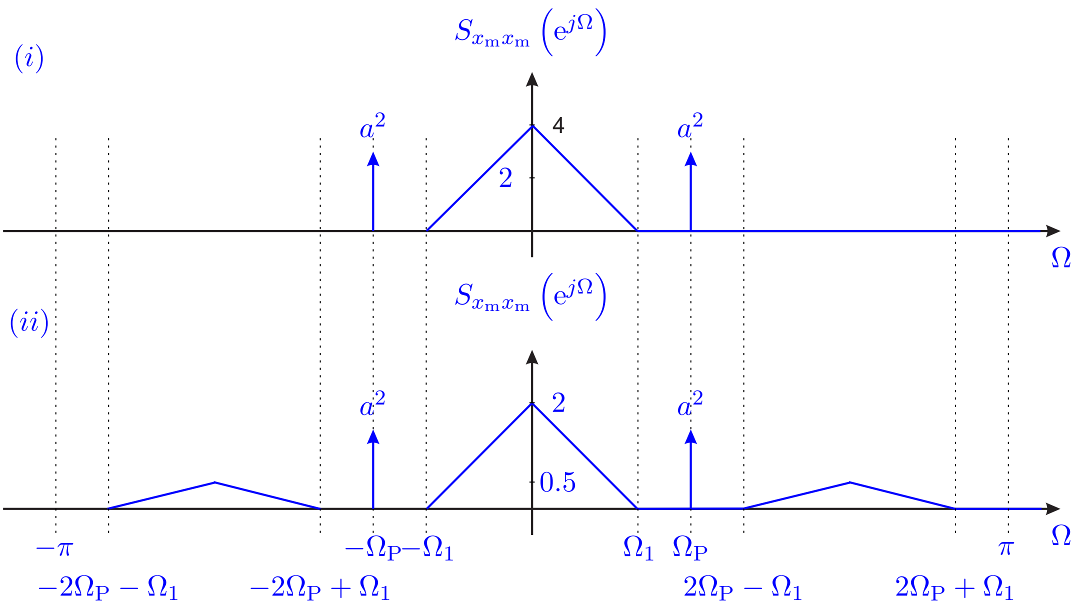
Nun sollen zwei Prozesse $x_\mathrm{L}(n)$ und $x_\mathrm{R}(n)$ mit folgendem Autoleistungsdichtespektrum $S_{xx}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) = S_{x_\mathrm{R}x_\mathrm{R}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) = S_{x_\mathrm{L}x_\mathrm{L}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$ übertragen werden, wobei $\Omega_1 < \Omega_C < \Omega_\mathrm{P}$.



(f) Skizzieren Sie das Autoleistungsdichtespektrum $S_{x_\mathrm{m}x_\mathrm{m}}\left(e^{j\Omega}\right)$ des Ausgangsprozesses $x_\mathrm{m}(n)$ für folgende zwei Fälle. Gehen Sie davon aus, dass $3\Omega_\mathrm{P} < \pi$.

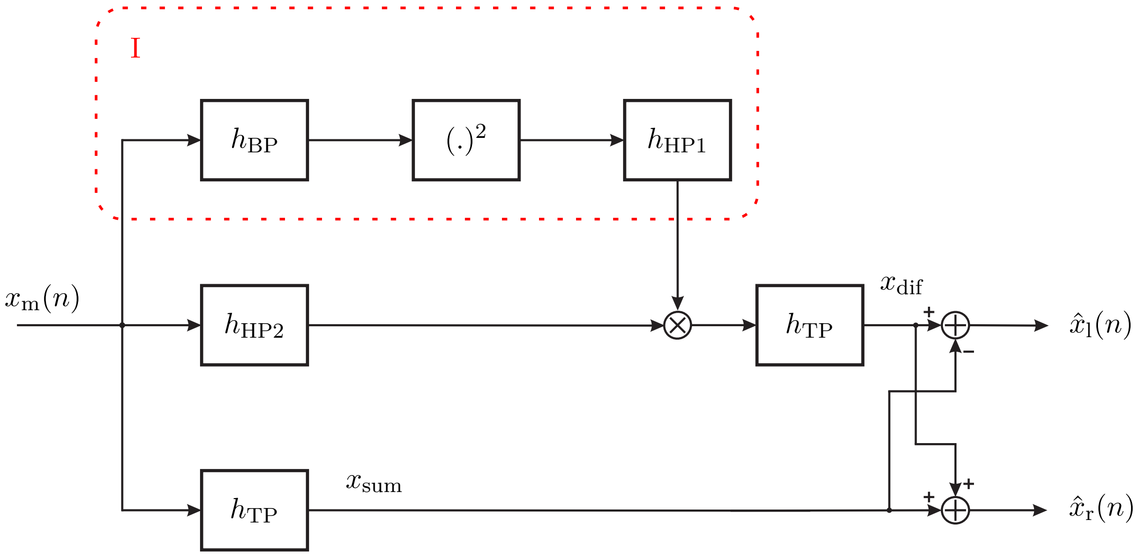
(i) Die Prozesse sind gleich, $x_\mathrm{R}(n) = x_\mathrm{L}(n)$. (3 P)

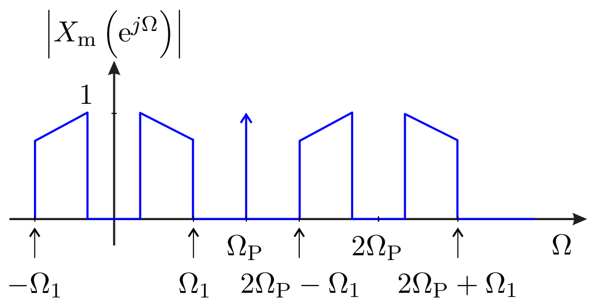
(ii) Die Prozesse $x_\mathrm{R}(n)$ und $x_\mathrm{L}(n)$ sind orthogonal zueinander. (4 P)



Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 3 gelöst werden.*

Nach einer erfolgreichen Übertragung und Transformation in das Basisband wird ein Stereo-Basisbandsignal $x_\mathrm{m}(n)$ empfangen und mit Hilfe des unten dargestellten Demodulators wieder in zwei Stereokomponenten $x_\mathrm{l}(n)$ und $x_\mathrm{r}(n)$ aufgeteilt. Zusätzlich ist auch das Betragsspektrum des Eingangssignals gegeben.





(g) Welchem Zweck dient der oberste Signalzweig I? Schreiben Sie eine Begründung in ganzen Sätzen. (2 P)

Mit Hilfe des obersten Zweiges wird der Träger zurückgewonnen. Im ersten Schritt wird das empfangene Signal $x_{\mathrm{m}}(n)$ mit Hilfe eines Bandpasses gefiltert um die halbe Trägerfrequenz Ω_{P} zu isolieren. Anschließend wird mit dem Hochpass der Gleichanteil entfernt. Am Ende entsteht ein Trägersignal mit der Frequenz $2\Omega_{\mathrm{P}}$, welcher zur Demodulation des Differenzsignals benutzt wird.

(h) Definieren Sie die idealen Filter h_{BP}, h_{HP1}, h_{HP2} und h_{TP} im Frequenzbereich für $0 < \Omega < \pi$. (8 P)

$$H_{\mathrm{BP}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) = \begin{cases} 1, & \text{für } \Omega_1 < \Omega < 2\Omega_{\mathrm{P}} - \Omega_1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$H_{\mathrm{HP2}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) = \begin{cases} 1, & \text{für } \Omega_{\mathrm{P}} < \Omega < \pi, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$H_{\mathrm{HP1}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) = \begin{cases} 1, & \text{für } \Omega_1 < \Omega < \pi, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$H_{\mathrm{TP}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 < \Omega < \Omega_{\mathrm{P}}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 2 gelöst werden.*

(h) Im gegebenen Blockschaltbild (Teil 1) wird die Differenz der beiden Eingangssignale $x_{\text{dif}}(n)$ mit einem Trägersignal $y_{\text{P}}(n)$ multipliziert. Um welche Ihnen bekannte Modulationsart handelt es sich? Welche Modulationsart würden Sie empfehlen um die Effizienz der Übertragung zu verbessern? (2 P)
Es handelt sich um eine Zweiseitenbandmodulation ohne Träger. Die Frequenzeffizienz kann verbessert werden indem man die Einseitenmodulation benutzt. Gleichzeitig verbessert sich die Energieeffizienz beim Senden, da die gesamte Sendeenergie einem Seitenband zur Verfügung steht.

Dies ist eine leere Seite.