TECHNISCHE FAKULTÄT DER
CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT
ZU KIEL

DIGITALE
SIGNALVERARBEITUNG UND
SYSTEMTHEORIE

Signale und Systeme I

Formelsammlung v2.6

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Formeln **2**
1.1 Trigonometrische Funktionen . . . 2
1.2 Integrations- und Differentiatiosregeln . . . 2
1.3 Unbestimmte Integrale . . . 2
1.4 Rechnen mit komplexen Exponentialfunktionen . . . 3
1.5 Summen und Reihen . . . 3
1.6 Verschiedenes . . . 3

2 Fourier-Reihe **4**
2.1 Fourier Sinus-/Cosinus-Reihe (Trigonometrische Fourier-Reihe) . . . 4

3 Fourier-Transformation **5**
3.1 Eigenschaften . . . 5
3.2 Gebräuchliche Korrespondenzen . . . 6

4 Diskrete Fourier-Transformation (DFT) **7**
4.1 Eigenschaften . . . 7

5 Zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT) **8**
5.1 Eigenschaften . . . 8
5.2 Gebräuchliche Korrespondenzen . . . 9

6 Laplace-Transformation **10**
6.1 Eigenschaften . . . 10
6.2 Gebräuchliche Korrespondenzen . . . 11

7 Z-Transformation **12**
7.1 Eigenschaften . . . 12
7.2 Gebräuchliche Korrespondenzen . . . 12

1 Mathematische Formeln

1.1 Trigonometrische Funktionen

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot(x)$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

$$\begin{aligned}
\sin(x)\cdot\sin(y) &= \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]\\
\sin(x)\cdot\cos(y) &= \frac{1}{2}\left[\sin(x-y)+\sin(x+y)\right]\\
\cos(x)\cdot\cos(y) &= \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)+\cos(x+y)\right]\\
\sin(x)+\sin(y) &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\\
\cos(x)+\cos(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\\
\cos(x)-\cos(y) &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\\
1 &= \cos^2(x)+\sin^2(x)\\
\cos^2(x) &= \frac{1}{2}\left[1+\cos(2x)\right]\\
\sin^2(x) &= \frac{1}{2}\left[1-\cos(2x)\right]\\
\cos(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)\\
\sin(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)
\end{aligned}$$

1.2 Integrations- und Differentiatiosregeln

Produktregel	$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$
Quotientenregel	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$
Kettenregel	$\Big(y(x(t))\Big)' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = y'(x(t))\cdot x'(t)$
Partielle Integration	$\int u'v\,dx = u\,v - \int u\,v'\,dx$

1.3 Unbestimmte Integrale

Hinweis: Die Integrationskonstante C für die Stammfunktionen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens wurde weggelassen.

$$\begin{aligned}
\int x\,e^{\alpha x}\,dx &= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2}\,(\alpha x - 1)\\
\int x^2\,e^{\alpha x}\,dx &= e^{\alpha x}\left(\frac{x^2}{\alpha}-\frac{2x}{\alpha^2}+\frac{2}{\alpha^3}\right)\\
\int x\cos(\omega x)\,dx &= \frac{\cos(\omega x)}{\omega^2}+\frac{x\sin(\omega x)}{\omega}\\
\int x\sin(\omega x)\,dx &= \frac{\sin(\omega x)}{\omega^2}-\frac{x\cos(\omega x)}{\omega}
\end{aligned}$$

$$\int x^2 \cos(\omega x)\,dx = \frac{2x}{\omega^2}\cos(\omega x) + \left(\frac{x^2}{\omega} - \frac{2}{\omega^3}\right)\sin(\omega x)$$

$$\int x^2 \sin(\omega x)\,dx = \frac{2x}{\omega^2}\sin(\omega x) + \left(\frac{x^2}{\omega} - \frac{2}{\omega^3}\right)\cos(\omega x)$$

$$\int e^{ax} \cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big[a\cos(bx) + b\sin(bx)\Big]$$

$$\int e^{ax} \sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big[a\sin(bx) - b\cos(bx)\Big]$$

1.4 Rechnen mit komplexen Exponentialfunktionen

Eulersche Formel	$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$
	$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right)$
	$\sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$
„Halbes Argument ausklammern“	$1 - e^{-jx} = e^{-jx/2}\left(e^{jx/2} - e^{-jx/2}\right)$
	$= 2j\, e^{-jx/2}\, \sin(x/2)$

1.5 Summen und Reihen

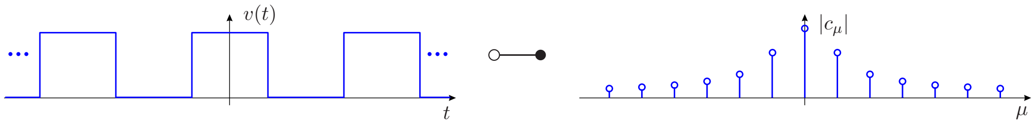
Geometrische Reihe	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad \text{für } \lvert q\rvert < 1$
Endliche geometrische Reihe	$\sum\limits_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}, \quad \text{für } q \neq 1$
Gaußsche Summenformel	$\sum\limits_{n=1}^{N} n = \frac{N}{2}(N+1)$

1.6 Verschiedenes

Binomialkoeffizient	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{für } n \geq k \geq 0$
Quadratische Gleichung	$x^2 + px + q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Umrechnen von Logarithmen	$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

2 Fourier-Reihe

Das Signal $v(t) = v(t + \lambda T)$ sei periodisch mit Periodendauer $T \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$.



$$v(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_\mu \, e^{j\mu\frac{2\pi}{T}t} \qquad c_\mu = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\, e^{-j\mu\frac{2\pi}{T}t} dt$$

2.1 Fourier Sinus-/Cosinus-Reihe (Trigonometrische Fourier-Reihe)

$$v(t) = c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \cos\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right)$$

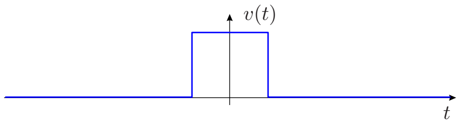
Berechung der Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\, dt \\ a_\mu &= 2\,\mathrm{Re}\left\{c_\mu\right\} = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \cos\left(\mu\frac{2\pi}{T}t\right)\, dt \\ b_\mu &= -2\,\mathrm{Im}\left\{c_\mu\right\} = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \sin\left(\mu\frac{2\pi}{T}t\right)\, dt \end{aligned}$$

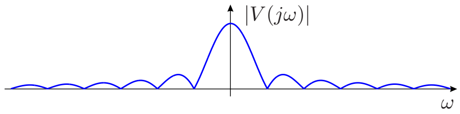
Beziehung zur komplexen Fourier-Reihe

$$\begin{aligned} c_\mu &= \frac{1}{2}\left(a_\mu - j b_\mu\right), \quad c_{-\mu} = c_\mu^* \text{ für } \mu \in \{1, \ldots, \infty\} \\ c_0 &= \frac{a_0}{2} \end{aligned}$$

3 Fourier-Transformation



$\circ\!\!-\!\!\!\bullet$



$$v(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{V(j\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

$$V(j\omega) = \mathcal{F}\left\{v(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

3.1 Eigenschaften

Linearität	$a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)$	$\circ\!\!-\!\!\!\bullet$	$a_1 V_1(j\omega) + a_2 V_2(j\omega)$
Zeitverschiebung	$v(t - t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\!\bullet$	$V(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
Modulation	$v(t)e^{j\omega_0 t}$	$\circ\!\!-\!\!\!\bullet$	$V(j(\omega - \omega_0))$
Zeitskalierung	$v(at)$	$\circ\!\!-\!\!\!\bullet$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}V\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Zeitumkehr	$v(-t)$	$\circ\!\!-\!\!\!\bullet$	$V(-j\omega)$
Symmetrie	$X(jt)$	$\circ\!\!-\!\!\!\bullet$	$2\pi v(-\omega)$
Ableitung im Zeitbereich	$\frac{d^n}{dt^n}v(t)$	$\circ\!\!-\!\!\!\bullet$	$(j\omega)^n V(j\omega)$
Ableitung im Frequenzbereich	$(-jt)^n v(t)$	$\circ\!\!-\!\!\!\bullet$	$\frac{d^n}{d\omega^n}V(j\omega)$
Integration	$\int\limits_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\!\bullet$	$\frac{1}{j\omega}V(j\omega) + \pi V(0)\delta_0(\omega)$
Multiplikation	$v_1(t) \cdot v_2(t)$	$\circ\!\!-\!\!\!\bullet$	$\frac{1}{2\pi}V_1(j\omega) * V_2(j\omega)$
Faltung	$v_1(t) * v_2(t)$	$\circ\!\!-\!\!\!\bullet$	$V_1(j\omega) \cdot V_2(j\omega)$

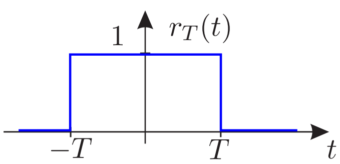
Es gilt für die Faltungsoperation

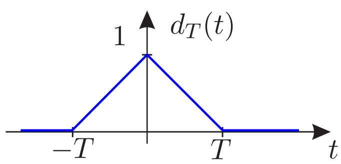
$$v_1(t) * v_2(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} v_1(\tau)v_2(t-\tau)\, d\tau$$

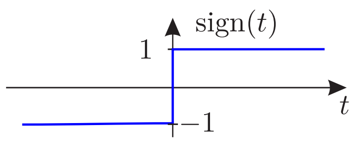
3.2 Gebräuchliche Korrespondenzen

$\delta_0(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	1	
$\delta_{-1}(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta_0(\omega)$	
$e^{-at}\delta_{-1}(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{a+j\omega}$	$a > 0$
$e^{at}\delta_{-1}(-t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{a-j\omega}$	$a > 0$
$t^n e^{-at}\delta_{-1}(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}$	$a > 0$
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)\delta_{-1}(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$	$a > 0$
$e^{-at}\sin(\omega_0 t)\delta_{-1}(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$	$a > 0$
$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta_0(t-nT)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{2\pi}{T}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta_0\left(\omega - \frac{2\pi}{T}n\right)$	
$\cos(\omega_0 t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\pi\left[\delta_0(\omega+\omega_0) + \delta_0(\omega-\omega_0)\right]$	
$\sin(\omega_0 t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$j\pi\left[\delta_0(\omega+\omega_0) - \delta_0(\omega-\omega_0)\right]$	
$\cos(\omega_0 t)\delta_{-1}(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{\pi}{2}\left[\delta_0(\omega+\omega_0) + \delta_0(\omega-\omega_0)\right] + \frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$	
$\sin(\omega_0 t)\delta_{-1}(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{j\pi}{2}\left[\delta_0(\omega+\omega_0) - \delta_0(\omega-\omega_0)\right] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$	
$\lvert t\rvert$	$\circ\!-\!\bullet$	$-\frac{2}{\omega^2}$	
$e^{j\omega_0 t}$	$\circ\!-\!\bullet$	$2\pi\delta_0(\omega-\omega_0)$	
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{\frac{-\sigma^2\omega^2}{2}}$	
$r_T(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{2}{\omega}\sin(\omega T) = 2T\mathrm{si}(\omega T)$	
$d_T(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$T\mathrm{si}^2\left(\frac{T\omega}{2}\right)$	
$\mathrm{sign}(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{2}{j\omega}$	

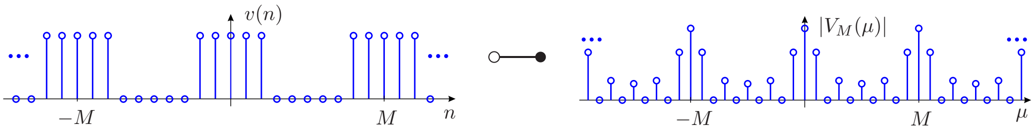
Definition einiger verwendeter Funktionen:







4 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)



$$v(n) = \mathrm{IDFT}_M\left\{V_M(\mu)\right\} = \frac{1}{M}\sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu)\, e^{j\mu\frac{2\pi}{M}n}$$

$$V_M(\mu) = \mathrm{DFT}_M\left\{v(n)\right\} = \sum_{n=0}^{M-1} v(n)\, e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}n}$$

4.1 Eigenschaften

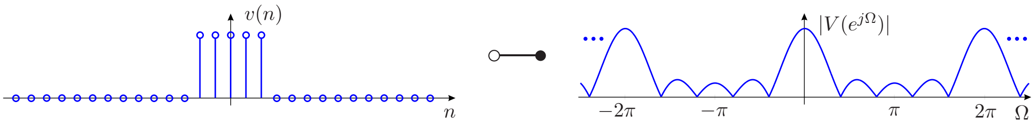
Linearität	$a_1 v_1(n) + a_2 v_2(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$a_1 V_{1M}(\mu) + a_2 V_{2M}(\mu)$
Zeitverschiebung	$v(n-n_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$V_M(\mu)e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}n_0}$
Modulation	$v(n)e^{j\mu_0\frac{2\pi}{M}n}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$V(\mu-\mu_0)$
Differenz im Zeitbereich	$v(n) - v(n-1)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$V_M(\mu)(1-e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}})$
Multiplikation	$v_1(n)\cdot v_2(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{M}V_{1M}(\mu) \circledast V_{2M}(\mu)$
Zyklische Faltung	$v_1(n) \circledast v_2(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$V_{1M}(\mu)\cdot V_{2M}(\mu)$

Es gilt

$$v_1(n) \circledast v_2(n) = \sum_{\kappa=0}^{M-1} v_1(\kappa) v_2(n-\kappa)_{\text{mod } M}$$

$$V_{1M}(\mu) \circledast V_{2M}(\mu) = \sum_{\nu=0}^{M-1} V_{1M}(\nu) V_{2M}(\mu-\nu)_{\text{mod } M}$$

5 Zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT)



$$v(n) = \mathcal{F}^{-1}\left\{V(e^{j\Omega})\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} V(e^{j\Omega})\, e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$V(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\left\{v(n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n)\, e^{-j\Omega n}$$

5.1 Eigenschaften

Periodizität	$V(e^{j\Omega})$	$=$	$V(e^{j(\Omega+2\pi k)})$	$k \in \mathbb{Z}$
Linearität	$a_1 v_1(n) + a_2 v_2(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$a_1 V_1(e^{j\Omega}) + a_2 V_2(e^{j\Omega})$	
Zeitverschiebung	$v(n-n_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$V(e^{j\Omega})e^{-j\Omega n_0}$	
Modulation	$v(n)e^{j\Omega_0 n}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$V(e^{j(\Omega-\Omega_0)})$	
Zeitskalierung	$v_{(m)}(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$V(e^{j\Omega m})$	$m \in \mathbb{Z}^+$
Zeitumkehr	$v(-n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$V(e^{-j\Omega})$	
Konjugation	$v^*(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$V^*(e^{-j\Omega})$	
Ableitung im Frequenzbereich	$nv(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$j\frac{d}{d\Omega}V(e^{j\Omega})$	
Multiplikation	$v_1(n)\cdot v_2(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2\pi}V_1(e^{j\Omega}) \circledast V_1(e^{j\Omega})$	
Faltung	$v_1(n) * v_2(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$V_1(e^{j\Omega})\cdot V_2(e^{j\Omega})$	

Es gilt

$$v_{(m)}(n) = \begin{cases} v(n/m) & , n/m \in \mathbb{Z} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$v_1(n) * v_2(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v_1(\kappa)v_2(n-\kappa)$$

$$V_1(e^{j\Omega}) \circledast V_2(e^{j\Omega}) = \int_{2\pi} V_1(e^{j\Omega})V_2(e^{j(\Omega-\theta)})d\theta$$

5.2 Gebräuchliche Korrespondenzen

$$\gamma_0(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1$$

$$1 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2\pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - 2\pi\lambda)$$

$$\gamma_{-1}(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + j\pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - 2\pi\lambda)$$

$$e^{j\Omega_0 n} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2\pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - \Omega_0 - 2\pi\lambda)$$

$$\cos(\Omega_0 n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} [\delta_0(\Omega + \Omega_0 - 2\pi\lambda) + \delta_0(\Omega - \Omega_0 - 2\pi\lambda)]$$

$$\sin(\Omega_0 n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad j\pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} [\delta_0(\Omega + \Omega_0 - 2\pi\lambda) - \delta_0(\Omega - \Omega_0 - 2\pi\lambda)]$$

$$a^n \gamma_{-1}(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} \qquad |a| < 1$$

$$(n+1)a^n \gamma_{-1}(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2} \qquad |a| < 1$$

$$\begin{cases} 1 & ,|n| \leq N_1 \\ 0 & ,|n| > N_1 \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\sin\left(\Omega(N_1+\frac{1}{2})\right)}{\sin(\Omega/2)}$$

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \gamma_0(n - \lambda M) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2\pi \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - \mu\tfrac{2\pi}{M})$$

6 Laplace-Transformation

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\substack{s=\sigma+j\omega \\ \omega=-\infty}}^{\infty} V(s) e^{st}\, ds$$

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-st}\, dt$$

6.1 Eigenschaften

Linearität	$a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$a_1 V_1(s) + a_2 V_2(s)$
Zeitverschiebung	$v(t-t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-st_0} V(s)$
Modulation	$v(t) e^{s_0 t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$V(s - s_0)$
Ableitung im Zeitbereich	$\frac{d}{dt} v(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$sV(s)$
Ableitung im Bildbereich	$(-t) v(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{d}{ds} V(s)$
Integration	$\int\limits_{-\infty}^{t} v(\tau)\, d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s} V(s)$
Multiplikation	$v_1(t) \cdot v_2(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2\pi j} V_1(s) * V_2(s)$
Faltung	$v_1(t) * v_2(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$V_1(s) \cdot V_2(s)$

Es gilt

$$V_1(s) * V_2(s) = \int\limits_{\substack{x=\sigma+j\eta \\ \eta=-\infty}}^{\infty} V_1(x) V_2(s-x)\, dx$$

$$v_1(t) * v_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(\tau) v_2(t-\tau)\, d\tau$$

6.2 Gebräuchliche Korrespondenzen

$\delta_0(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	1	$\forall s$
$\delta_{-1}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$t^k\delta_{-1}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0,\ k \in \mathbb{N}_0$
$-\delta_{-1}(-t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$
$e^{s_\infty t}\delta_{-1}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s-s_\infty}$	$\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{s_\infty\}$
$te^{s_\infty t}\delta_{-1}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{(s-s_\infty)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{s_\infty\}$
$t^k e^{s_\infty t}\delta_{-1}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{k!}{(s-s_\infty)^{k+1}}$	$\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{s_\infty\},\ k \in \mathbb{N}_0$
$e^{s_\infty t}[1 + s_\infty t]\delta_{-1}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{(s-s_\infty)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{s_\infty\}$
$\cos(\omega_0 t - \varphi)\delta_{-1}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s\cos(\varphi)+\omega_0\sin(\varphi)}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$\cos(\omega_0 t)\delta_{-1}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$\sin(\omega_0 t)\delta_{-1}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$

Gebrochen-rationale Funktionen

$$B_0 + \sum_{\nu=1}^{k_0}\sum_{\kappa=1}^{k_\nu} \frac{B_{\nu,\kappa}}{(s - s_{\infty,\nu})^\kappa} \circ\!\!-\!\!\bullet\ B_0\delta_0(t) + \sum_{\nu=1}^{k_0}\sum_{\kappa=1}^{k_\nu} B_{\nu,\kappa} e^{s_{\infty,\nu}t}\delta_{-\kappa}(t)$$

$$B_0\delta_0(t) + \sum_{\nu=1}^{k_0}\sum_{\kappa=1}^{k_\nu} B_{\nu,\kappa} e^{s_{\infty,\nu}t}\frac{t^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!}\delta_{-1}(t)$$

Für $\mathrm{Re}\{s\} > \max\left\{\mathrm{Re}\{s_{\infty,\nu}\}\right\}$.

7 Z-Transformation

$$v(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{V(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\text{um } 0}^{\text{Geschl. Weg}} V(z) z^{n-1}\, dz$$

$$V(z) = \mathcal{Z}\{v(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) z^{-n}$$

7.1 Eigenschaften

Linearität	$a_1 v_1(n) + a_2 v_2(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$a_1 V_1(z) + a_2 V_2(z)$
Zeitverschiebung	$v(n-n_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$z^{-n_0} V(z)$
Modulation	$v(n) z_0^n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$V\left(\frac{z}{z_0}\right)$
Differenz im Zeitbereich	$v(n) - v(n-1)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$V(z)[1 - z^{-1}]$
Ableitung im Bildbereich	$(-n)v(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$z \frac{d}{dz} V(z)$
Summation	$\sum_{\kappa=-\infty}^{n} v(\kappa)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{V(z)}{1-z^{-1}}$
Multiplikation	$v_1(t) \cdot v_2(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\eta} V_1(\eta) V_2\left(\frac{z}{\eta}\right) \frac{d\eta}{\eta}$
Faltung	$v_1(n) * v_2(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$V_1(z) \cdot V_2(z)$

Es gilt

$$v_1(n) * v_2(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v_1(\kappa) v_2(n-\kappa)$$

7.2 Gebräuchliche Korrespondenzen

$\gamma_0(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	1	$\forall z$
$\gamma_{-1}(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-\gamma_{-1}(-n-1)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert < 1$
$a^n \cdot \gamma_{-1}(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n \cdot \gamma_{-1}(-n-1)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$na^n \cdot \gamma_{-1}(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{za}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$n^2 a^n \cdot \gamma_{-1}(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{za(z+a)}{(z-a)^3}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\binom{n+\lambda-1}{\kappa} a^{n+\lambda-\kappa-1} \cdot \gamma_{-1}(n+\lambda-\kappa-1)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z^\lambda}{(z-a)^{\kappa+1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\cos(\Omega_0 n - \varphi) \cdot \gamma_{-1}(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z[z\cos(\varphi) - \cos(\Omega_0+\varphi)]}{z^2 - 2z\cos(\Omega_0) + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\cos(\Omega_0 n) \cdot \gamma_{-1}(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z[z - \cos(\Omega_0)]}{z^2 - 2z\cos(\Omega_0) + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\Omega_0 n) \cdot \gamma_{-1}(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{z\sin(\Omega_0)}{z^2 - 2z\cos(\Omega_0) + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$

Gebrochen-rationale Funktionen

$$B_0 + \sum_{\nu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\nu} B_{\nu,\kappa} \frac{z}{(z - z_{\infty,\nu})^\kappa} \circ\!\!-\!\!\bullet\; B_0 \gamma_0(t) + \sum_{\nu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\nu} B_{\nu,\kappa} z_{\infty,\nu}^{n-\kappa+1} \binom{n}{\kappa - 1} \gamma_{-1}(n - \kappa + 1)$$

Für $|z| > \max\{|z_{\infty,\nu}|\}$.