Signale und Systeme I

Modulklausur WS 2019/2020

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

Datum: 14.07.2020

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.
Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________________

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/33	/34	/33

Summe der Punkte: ________________ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ________________ Unterschrift: ______________________________

Signale und Systeme I

Modulklausur WS 2019/2020

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort:	KS2 - F-SR I, II, Mensa
Datum:	14.07.2020
Beginn:	16:00 h
Einlesezeit:	10 Minuten
Bearbeitungszeit:	90 Minuten

Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist ausschließlich das Durchblättern der aktuellen Klausur erlaubt**, darüber hinaus sind alle Schreibutensilien abzulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (33 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei das periodische Signal $v(t)$, welches sich mit der Periodendauer T wiederholt. Eine Periode sei definiert als:

$$v(t) = t^2, \qquad \text{für } -T/2 \leq t \leq T/2.$$

(a) Geben Sie allgemein die Berechnungsvorschriften für die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe an. Welche Koeffizienten bilden den geraden und welche den ungeraden Anteil einer Funktion ab? (2 P)

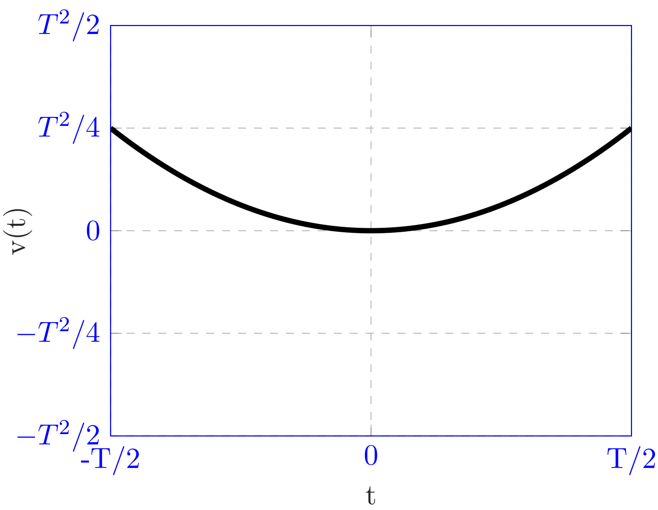
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)dt$$
$$a_\mu = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\cos\left(\mu\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$
$$b_\mu = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\sin\left(\mu\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

Die geraden Anteile einer Funktion werden durch die Koeffizienten a_μ und die ungeraden Anteile einer Funktion werden durch die Koeffizienten b_μ abgebildet. Der Gleichanteil wird durch a_0 angegeben.

(b) Weist $v(t)$ eine Symmetrie auf? Welche Koeffizienten müssen für die Fourier-Reihe von $v(t)$ berechnet werden? (2 P)

$v(t)$ ist eine gerade Funktion und somit müssen nur die Koeffizienten a_μ berechnet werden, die Koeffizienten b_μ sind alle gleich Null.

(c) Skizzieren Sie $v(t)$. (2 P)



(d) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe des Signals $v(t)$. (10 P)
Zunächst Berechnung des Gleichanteils a_0:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)dt \\ &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t^2 dt \\ &= \frac{2}{T}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{2}{T}\left(\frac{1}{3}\frac{T^3}{8} - \left(-\frac{1}{3}\frac{T^3}{8}\right)\right) \\ &= \frac{1}{6}T^2 \end{aligned}$$

Berechnung der Koeffizienten a_μ:

$$\begin{aligned} a_\mu &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\cos\left(\mu\frac{2\pi}{T}t\right)dt \\ &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t^2\cos\left(\mu\frac{2\pi}{T}t\right)dt \qquad |\text{Stammfkt. aus FS} \\ &= \frac{2}{T}\left[\frac{2t}{\left(\mu\frac{2\pi}{T}\right)^2}\cos\left(\mu\frac{2\pi}{T}t\right) + \left(\frac{t^2}{\mu\frac{2\pi}{T}} - \frac{2}{(\mu\frac{2\pi}{T})^3}\right)\sin\left(\mu\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_{-T/2}^{T/2} \end{aligned}$$

| Dadurch, dass die untere Grenze den selben Betrag mit negativem VZ zu der oberen Grenze aufweist, ergibt sich ein Faktor 2.

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{T}\left[\frac{T^3}{4\pi^2\mu^2}\cos(\pi\mu) + \left(\frac{T^3}{8\pi\mu} - \frac{T^3}{4\pi^3\mu^3}\right)\sin(\pi\mu)\right] \\ &= \frac{T^2}{\pi^2\mu^2}\cos(\pi\mu) + \left(\frac{T^2}{2\pi\mu} - \frac{T^2}{\pi^3\mu^3}\right)\sin(\pi\mu) \qquad |\sin(\pi\mu) = 0, \text{ für alle } \mu \\ &= \frac{T^2}{\pi^2\mu^2}\cos(\pi\mu) \\ &= \frac{T^2}{\pi^2\mu^2}(-1)^\mu \end{aligned}$$

(e) Wie könnten Sie basierend auf den Fourier-Reihen-Koeffizienten auf das Spektrum $V(j\omega)$ schließen? Skizzieren Sie hier nur den Weg und geben Sie den allgemeinen Zusammenhang in Formeln an. Es soll kein Ergebnis berechnet werden. (4 P)

$$V(j\omega) = 2\pi\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_\mu\delta_0\Big(\omega - \mu\frac{2\pi}{T_0}\Big)$$

$$\text{mit: } c_\mu = \frac{1}{2}(a_\mu - jb_\mu)\,, c_{-\mu} = c_\mu^* \text{ für } \mu \in \{1, ..., \infty\}$$

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Gegeben sei das Spektrum $X(j\omega)$, welches in der folgenden Abbildung dargestellt ist:

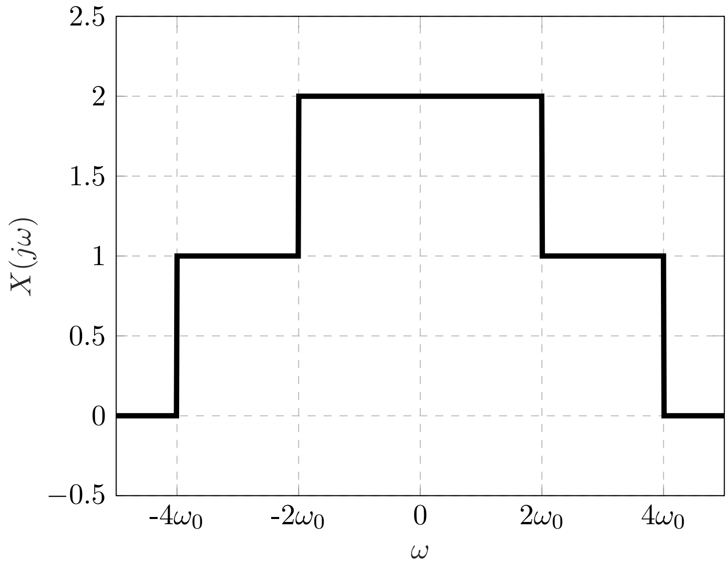


Abbildung 1: Spektrum $X(j\omega)$ des Signals $x(t)$

(f) Welche Symmetrieeigenschaften weisen relle Spektren im Zusammenhang mit Ihrem Zeitsignal auf? Welche Eigenschaften sind daher für die inverse Fourier-Transformation $x(t)$ von $X(j\omega)$ zu erwarten? (2 P)

$$x(t) = x_{re,ge}(t) \quad + \quad x_{re,un}(t) \quad + \quad jx_{im,ge}(t) \quad + \quad jx_{im,un}(t)$$

$$X(j\omega) = X_{re,ge}(j\omega) + X_{re,un}(j\omega) + jX_{im,ge}(j\omega) + jX_{im,un}(j\omega)$$

Das das gegebene Spektrum $X(j\omega)$ reell und gerade ist, ist ein reelles und gerades Zeitsignal $x(t)$ zu erwarten. (Der obere Zusammenhang ist nur für die Vollständigkeit komplett angegeben. Für die richtige Beantwortung der Frage reicht es, die Transformation der reellen Anteile des Spektrums richtig aufzuführen.)

(g) Berechnen Sie die inverse Fourier-Transformierte $x(t)$ des Spektrums $X(j\omega)$. (8 P)

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-4\omega_0}^{-2\omega_0} e^{j\omega t} d\omega + 2\int_{-2\omega_0}^{2\omega_0} e^{j\omega t} d\omega + \int_{2\omega_0}^{4\omega_0} e^{j\omega t} d\omega\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{1}{jt} e^{j\omega t}\right]_{-4\omega_0}^{-2\omega_0} + 2\left[\frac{1}{jt} e^{j\omega t}\right]_{-2\omega_0}^{2\omega_0} + \left[\frac{1}{jt} e^{j\omega t}\right]_{2\omega_0}^{4\omega_0}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi jt}\left(e^{-j2\omega_0 t} - e^{-j4\omega_0 t} + e^{j4\omega_0 t} - e^{j2\omega_0 t}\right) + \frac{2}{2\pi jt}\left(e^{j2\omega_0 t} - e^{-j2\omega_0 t}\right) \\
&= \frac{1}{\pi t}\left(-\sin(2\omega_0 t) + \sin(4\omega_0 t)\right) + \frac{2}{\pi t}\sin(2\omega_0 t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi t}\left(\sin\left(2\omega_0 t\right) + \sin\left(4\omega_0 t\right)\right) \\
&= \frac{2\omega_0}{\pi}\mathrm{si}\left(2\omega_0 t\right) + \frac{4\omega_0}{\pi}\mathrm{si}\left(4\omega_0 t\right)
\end{aligned}
$$

(h) Wie lautet die Definition des Abtasttheorems? Mit welcher Frequenz ω_A muss das Signal also mindestens abgetastet werden, um das Abtasttheorem nicht zu verletzen? (3 P)

Das Abtasttheorem besagt, dass ein Signal, bandbegrenzt durch eine maximale Frequenz ω_B, dann eindeutig bestimmt ist, wenn für die Abtastfrequenz ω_A folgendes gilt:

$$\omega_A > 2\omega_B.$$

Somit ergibt sich durch das einsetzen der maximal auftretenden Frequenz $4\omega_0$:

$$\omega_A > 8\omega_0.$$

Aufgabe 2 (34 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei die DFT $V_M(\mu)$ einer diskreten Folge $v(n)$ der Länge $M = 4$:

$$V_4(\mu) = \begin{cases} 4, & \text{für } \mu = 0, \\ 2, & \text{für } \mu = 1, \\ 1, & \text{für } \mu = 2, \\ 0.5, & \text{für } \mu = 3. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die inversen Fourier-Transformierte IDFT$\{V_4(\mu)\}$ für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. (9 P)

$$\begin{aligned}
v(n) &= \frac{1}{4} \sum_{\mu=0}^{3} V_4(\mu) e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n}, \\
v(0) &= \frac{1}{4} (4 + 2 + 1 + 0.5) = 1.875, \\
v(1) &= \frac{1}{4} \left(4 + 2 \cdot e^{j\frac{2\pi}{4}} + 1 \cdot e^{j\frac{2\pi}{4} \cdot 2} + 0.5 \cdot e^{j\frac{2\pi}{4} \cdot 3}\right) = \frac{1}{4} (4 + j2 - 1 - j0.5) = 0.75 + j0.375, \\
v(2) &= \frac{1}{4} \left(4 + 2 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{4}} + 1 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 2} + 0.5 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 3}\right) = \frac{1}{4} (4 - 2 + 1 - 0.5) = 0.625, \\
v(3) &= \frac{1}{4} \left(4 + 2 \cdot e^{j \cdot 3 \cdot \frac{2\pi}{4}} + 1 \cdot e^{j \cdot 3 \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 2} + 0.5 \cdot e^{j \cdot 3 \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 3}\right) = \frac{1}{4} (4 - j2 - 1 + j0.5) = 0.75 - j0.375.
\end{aligned}$$

(b) Was können Sie über die Fourier-Transformierte $V_4(\mu)$ und die Folge $v(n)$ aussagen. Nutzen Sie unter anderem das Ergebnis aus *(a)*. Begründen Sie stets Ihre Antworten! (8 P)

(i) Enthält die Fourier-Transformierte $V_4(\mu)$ sowohl gerade als ungerade Anteile? Wenn ja, wie könnten diese bestimmt werden?

(ii) Können Sie die Werte der DFT $V_4(\mu)$ für $\mu \in \{-1, -2, -3\}$ aus den oberen DFT-Werten rekonstruieren, ohne die geraden und ungeraden Anteile der DFT bestimmen zu müssen?

(iii) Enthält die Folge $v(n)$ einen Mittelwert? Wenn ja, bestimmen Sie diesen!

(i) Die Fourier-Transformierte $V_4(\mu)$ enthält *gerade* und *ungerade* Anteile $V_{4\text{re,ge}}(\mu)$ und $V_{4\text{re,un}}(\mu)$, weil einzelne Werte der inversen DFT komplexwertig sind und Real- als auch Imaginärteil aufweisen. Der Realteil dieser Werte stellt den geraden Anteil der Folge $v(n)$, der Imaginärteil dieser Werte stellt den ungeraden Anteil der Folge $v(n)$ dar. Um auf den geraden und ungeraden Anteile der DFT $V_M(\mu)$ zu kommen, müssen der Realteil und Imaginärteil der Folge $v(n)$ getrennt von einander transformiert werden.

(ii) Die Werte der DFT $V_M(\mu)$ für $\mu \in \{-1,-2,-3\}$ können ohne explizite Berechnung der geraden und ungeraden Anteile der DFT *nicht* bestimmt werden:

$$\begin{aligned} V_M(-\mu) &= V_{4\text{re,ge}}(-\mu) + V_{4\text{re,un}}(-\mu), \\ &= V_{4\text{re,ge}}(\mu) - V_{4\text{re,un}}(\mu). \end{aligned}$$

(iii) Die Folge v(n) enthält einen Mittelwert, weil der Wert $V_4(0)$ ungleich Null ist.

$$\overline{v} = \frac{1}{4} \cdot V_4(0) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Gegeben seien die diskreten Folgen $v_a(n)$ und $v_b(n)$ der Länge $M = 2$:

$$v_a(n) = \begin{cases} 1, & \text{für } n = 0 \\ 2, & \text{für } n = 1 \end{cases}, \qquad v_b(n) = \begin{cases} 3, & \text{für } n = 0 \\ 4, & \text{für } n = 1 \end{cases}.$$

(c) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der beiden Folgen $v_a(n)$ und $v_b(n)$. Bestimmen Sie anschließend das Produkt der Fourier-Transformierten $V_{ab,2}(\mu) = V_{a,2}(\mu) \cdot V_{b,2}(\mu)$. (6 P)

$$\begin{aligned} V_M(\mu) &= \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}n}, \\ V_{a,2}(0) &= 1 + 2 = 3, \\ V_{a,2}(1) &= 1 + 2 \cdot e^{-j\pi} = -1, \\ V_{b,2}(0) &= 3 + 4 = 7, \\ V_{b,2}(1) &= 3 + 4 \cdot e^{-j\pi} = -1, \\ V_{ab,2}(0) &= V_{a,2}(0) \cdot V_{b,2}(0) = 3 \cdot 7 = 21, \\ V_{ab,2}(1) &= V_{a,2}(1) \cdot V_{b,2}(1) = (-1) \cdot (-1) = 1. \end{aligned}$$

(d) Führen Sie die zyklische Faltung der beiden Folgen $v_a(n)$ und $v_b(n)$ durch und bestimmen Sie anschließend die Fourier-Transformierte dieser Faltung. (4 P)

$$\begin{aligned} v_1(n) \circledast v_2(n) &= \sum_{\kappa=0}^{M-1} v_1(\kappa) v_2(n-\kappa)_{\text{mod } M}, \\ v_{ab}(0) &= 11, \\ v_{ab}(1) &= 10. \end{aligned}$$

$$V_M(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n},$$
$$V_{ab,2}(0) = 11 + 10 = 21,$$
$$V_{ab,2}(1) = 11 + 10 \cdot e^{-j\pi} = 1.$$

(e) In der Vorlesung Signale und Systeme I haben Sie zwei Arten von Faltung kennengelernt. Nennen Sie die fehlende Faltungsmethode und erklären Sie den Hauptunterschied der beiden Faltungsarten. (4 P)

Es gibt die *lineare* und die *zyklische* Faltung. Bei zyklischer Faltung werden die beiden Folgen zyklisch wiederholt und nicht mit Nullen fortgeführt, wie bei der linearen Faltung. Das hat zur Folge, dass die Länge des Faltungsergebnisses bei der linearen Faltung die Summe der Folgenlängen minus Eins ist. Bei zyklischer Faltung entspricht die Länge der Faltung der Länge der kürzeren Folge von beiden.

(f) Welche Zeit-Frequenz-Beziehung lässt sich aus den Ergebnissen der Teilaufgaben *(c)* und *(d)* ableiten? (3 P)

$$v_a(n) \circledast v_b(n) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet V_{a,M}(\mu) \cdot V_{b,M}(\mu)$$

Aufgabe 3 (33 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei folgende diskrete Impulsantwort

$$h_{0,1}(n) \;=\; a\,\gamma_0(n) + b^n\, n\,\gamma_{-1}(n)$$

mit $a = \frac{1}{4}$ und $b = \frac{1}{2}$.

(a) Zeichnen Sie die Impulsantwort im Bereich $n \geq -4$ und $n \leq 4$. (4 P)

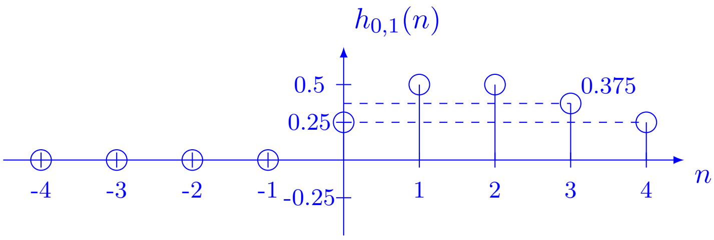


Abbildung 2: Impulsantwort $h_{0,1}(n)$

(b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H_1(z) = \mathcal{Z}\{h_{0,1}(n)\}$. Stellen Sie $H_1(z)$ in Polynomdarstellung dar und fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zusammen! (4 P)

Aus der Formelsammlung wird ersichtlich, dass gilt:

$$\gamma_0(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\; 1$$

$$b^n\, n\,\gamma_{-1}(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{zb}{(z-b)^2}$$

Dadurch ergibt sich die Übertragungsfunktion zu:

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}\,z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{4}\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\,z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{4}\left(z^2 - z + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\,z}{z^2 - z + \frac{1}{4}} \\
&= \frac{\frac{1}{4}\,z^2 + \frac{1}{4}\,z + \frac{1}{16}}{z^2 - z + \frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{4}\,\frac{z^2 + z + \frac{1}{4}}{z^2 - z + \frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

(c) Untersuchen Sie das gegebene System auf Stabilität, Kausalität, Reellwertigkeit und Minimalphasigkeit. Begründen Sie ihre Antworten. (8 P)

Das System ist

- stabil, dies sieht man an der absoluten Summierbarkeit der Impulsantwort $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{0,1}(n) < \infty$ oder daran, dass die Polstellen der Übertragungsfunktion $z_{\infty,1/2} = \frac{1}{2}$ im Einheitskreis liegen, d.h. $|z_{\infty,1/2}| < 1$
- kausal, da die Impulsantwort für $n < 0$ Null ist
- reell, da die Impulsantwort reellwertig ist
- minimalphasig, da die Nullstellen der Funktion $z_{0,1/2} = -\frac{1}{2}$ im Einheitskreis liegen, d.h. $|z_{0,1/2}| < 1$.

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Gegeben sei folgende Schaltung

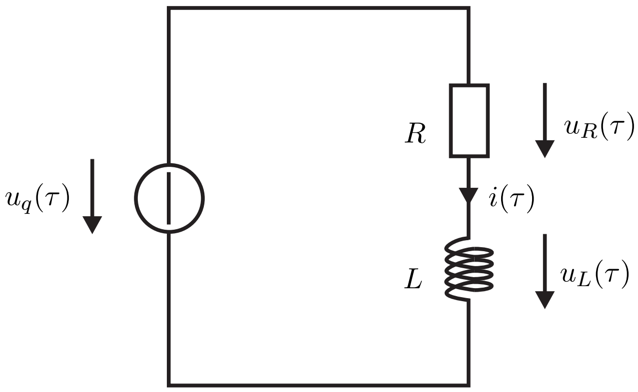


Abbildung 3: RL-Schwingkreis

mit der normierten Eingangsgröße

$$v(t) = \frac{u_q\left(\frac{R}{L}\,t\right)}{U_0}$$

und der normierten Ausgangsgröße

$$y(t) = \frac{u_L\left(\frac{R}{L}\,t\right)}{U_0}\,.$$

(d) Definieren Sie t in Abhängigkeit von τ! (1 P)

$$\tau = \frac{R}{L}t \qquad \rightarrow \qquad t = \frac{L}{R}\tau$$

(e) Bestimmen Sie die Differentialgleichung des oben gezeigten Systems in Abhängigkeit von $v(t)$ und $y(t)$! (7 P)

Aus der Maschenregel ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned} u_q(\tau) &= u_R(\tau) + u_L(\tau) \\ &= R\,i(\tau) + u_L(\tau) \qquad \text{mit } i(\tau) = \frac{\int u_L(\tau)\mathrm{d}\tau}{L} \\ &= \frac{R}{L}\int u_L(\tau)\,\mathrm{d}\tau + u_L(\tau) \end{aligned}$$

mit den normierten Eingangs- und Ausgangsgrößen und $\mathrm{d}t = \frac{L}{R}\mathrm{d}\tau$ ergibt sich

$$\frac{u_q\left(\frac{R}{L}t\right)}{U_0} = \frac{\frac{R}{L}\frac{L}{R}\int u_L\left(\frac{R}{L}t\right)\,\mathrm{d}t}{U_0} + \frac{u_L\left(\frac{R}{L}t\right)}{U_0}$$

mit Einsetzen der normierten Größen:

$$v(t) = \int y(t)\mathrm{d}t + y(t)$$

Durch Differenzieren aller Größen ergibt sich dann

$$\dot{v}(t) = y(t) + \dot{y}(t)$$

(f) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H_2(s)$ des Systems. (3 P)

Bei Anregung mit $v(t) = Ve^{st}$ erhält man am Ausgang $y(t) = H_2(s)Ve^{st}$, somit gilt für die Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned} s\,Ve^{st} &= s\,H_2(s)Ve^{st} + H_2(s)Ve^{st} \\ H_2(s) &= \frac{s}{s+1} \end{aligned}$$

Sollten Sie bis hierhin keine Übertragungsfunktion bestimmt haben, rechnen Sie bitte mit folgender Übertragungsfunktion weiter:

$$H_2(s) = \frac{s}{s-1}$$

(g) Bestimmen Sie den Betragsfrequenzgang des angegebenen Systems. Vereinfachen Sie so weit wie möglich! (4 P)

Mit dem Originalsystem:

$$
\begin{aligned}
|H_2(j\omega)| &= \left|\frac{j\omega}{j\omega+1}\right| \\
&= \left|\frac{j\omega\ (1-j\omega)}{\omega^2+1}\right| \\
&= \left|\frac{j\omega\ +\omega^2}{\omega^2+1}\right| \\
&= \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{1+\omega^2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{1+\omega^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{\omega^4+\omega^2}{(1+\omega^2)^2}} \\
&= \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}
\end{aligned}
$$

Mit dem Ersatzsystem:

$$
\begin{aligned}
|H_2(j\omega)| &= \left|\frac{j\omega}{j\omega-1}\right| \\
&= \left|\frac{j\omega\ (1+j\omega)}{-\omega^2-1}\right| \\
&= \left|\frac{j\omega\ -\omega^2}{-\omega^2-1}\right| \\
&= \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{1+\omega^2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{1+\omega^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{\omega^4+\omega^2}{(1+\omega^2)^2}} \\
&= \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}
\end{aligned}
$$

(h) Um welche Art Filter handelt es sich bei dem angegebenen System? (2 P)

Bei dem System handelt es sich um ein Hochpassfilter, da niedrige Frequenzen unterdrückt werden.

Dies ist eine leere Seite.