Signale und Systeme I

Modulklausur SS 2020

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Datum:	25.09.2020
Name:	______________________________
Matrikelnummer:	______________________________

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.
Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________________

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/39	/31	/30

Summe der Punkte: ________________ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ________________ Unterschrift: ______________________________

Signale und Systeme I

Modulklausur SS 2020

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort:	OHP5 - Chemie I & II
Datum:	25.09.2020
Beginn:	12:00 h
Einlesezeit:	10 Minuten
Bearbeitungszeit:	90 Minuten

Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist ausschließlich das Durchblättern der aktuellen Klausur erlaubt**, darüber hinaus sind alle Schreibutensilien abzulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (39 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei das Signal $v(n)$ mit der Abtastperiode $T_\mathrm{A} = \frac{T_0}{4}$:

$$v(n) = \mathrm{Re}\{e^{j\frac{\pi}{2}(n+1)}\}.$$

(a) Das zeitdiskrete Signal $v(n)$ soll durch lineare Interpolation in das zeitkontinuierliche Signal $u(t)$ überführt werden. Skizzieren Sie $u(t)$ im Intervall $[-T_0, T_0]$, indem Sie (4 P)

(i) die Stützstellen von $u(t)$ markieren, die durch $v(n)$ vorgegeben sind und

(ii) eine lineare Interpolation durchführen.

Hinweis: Denken Sie an eine vollständige Achsenbeschriftung. Bei der linearen Interpolation wird angenommen, dass unbekannte Funktionswerte auf der Verbindungsgeraden zwischen den zwei benachbarten Stützstellen liegen.

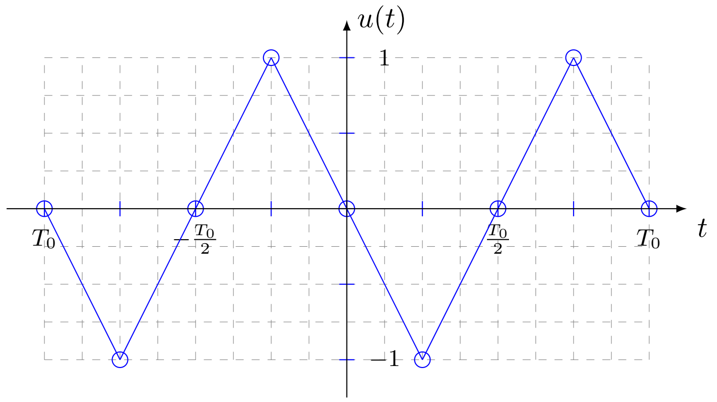


Abbildung 1: Interpoliertes Signal

Es sind Funktionswerte für die folgenden Indizes n von $v(n)$ gesucht (mit $T_\mathrm{A} = \frac{T_0}{4}$):

$$-T_0 \leq n\,T_\mathrm{A} \leq T_0$$
$$-\frac{T_0}{T_\mathrm{A}} \leq n \leq \frac{T_0}{T_\mathrm{A}}$$
$$-4 \leq n \leq 4.$$

Das zeitdiskrete Signal $v(n)$ nimmt im Intervall $[-4, 4]$ folgende Funktionswerte an:

$$v(n) = \mathrm{Re}\{e^{j\frac{\pi}{2}(n+1)}\} = \begin{cases} -1, & n \in \{-3, 1\}, \\ 1, & n \in \{-1, 3\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für das zeitkontinuierliche Signal $u(t)$ gilt damit an den Stellen $t = n\,T_\mathrm{A}$:

$$u(t) = v\left(\frac{t}{T_\mathrm{A}}\right).$$

Die so ermittelten Stützstellen werden im Abstand T_A im Koordinatensystem platziert. Anschließend wird die lineare Interpolation durchgeführt, bei der jeweils zwei benachbarte Stützstellen geradlinig verbunden werden.

(b) Geben Sie eine mathematische Beschreibung für eine Periode des Signals $u(t)$ an! Zerlegen Sie dazu das Signal in mehrere geeignete Abschnitte! Nutzen Sie Symmetrien zur Vereinfachung der Beschreibung! (4 P)

Die Periodendauer von $u(t)$ beträgt T_0. Das Signal kann abschnittsweise mit Geradengleichungen der Form $f(x) = mx + h$ mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt h beschrieben werden. Es werden die Signalabschnitte $[-\frac{T_0}{4}, \frac{T_0}{4}]$ und $[\frac{T_0}{4}, \frac{3T_0}{4}]$ gewählt. Auch andere Einteilungen sind denkbar. Die Steigungen ergeben sich aus der Skizze oder rechnerisch:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(\frac{T_0}{4}) - u(-\frac{T_0}{4})}{\frac{T_0}{4} - (-\frac{T_0}{4})} = -\frac{4}{T_0}, \\ m_2 &= -m_1 = \frac{4}{T_0}. \end{aligned}$$

Die y-Achsenabschnitte können aus der Skizze abgelesen werden:

$$\begin{aligned} h_1 &= 0, \\ h_2 &= -2. \end{aligned}$$

Damit gilt dann:

$$u(t) = \begin{cases} -\frac{4}{T_0}t, & -\frac{T_0}{4} \le t \le \frac{T_0}{4}, \\ \frac{4}{T_0}t - 2, & \frac{T_0}{4} \le t \le \frac{3T_0}{4}. \end{cases}$$

(c) Das Signal $u(t)$ soll nun durch die Koeffizienten der trigonometrischen Fourier-Reihe ausgedrückt werden. (13 P)

(i) Welche Koeffizienten erwarten Sie?

(ii) Geben Sie das Integral zur Berechnung der Fourier-Reihenkoeffizienten von $u(t)$ an!

(iii) Berechnen Sie eine Lösung des Integrals in Abhängigkeit von μ! Nutzen Sie dabei eine Integraltabelle und die 2π-Periodizität trigonometrischer Funktionen!

Das Signal $u(t)$ ist am Ursprung punktsymmetrisch, was einer ungeraden Funktion entspricht. Die Darstellung des Signals über die Fourier-Reihe erfolgt damit ausschließlich mit b_μ-Koeffizienten:

$$b_\mu = \frac{2}{T_0}\left(\int\limits_{t'}^{t'+T_0} u(t)\sin\left(\mu\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt\right).$$

Durch Einsetzen der mathematischen Beschreibung von $u(t)$ aus dem vorigen Aufgabenteil ergibt sich:

$$= \frac{2}{T_0}\left[\int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} -\frac{4}{T_0}t\sin\left(\mu\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt + \int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{3T_0}{4}}\left(\frac{4}{T_0}t-2\right)\sin\left(\mu\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt\right].$$

Die Integrale können mit $\int x\sin(wx)\mathrm{d}x = \frac{\sin(\omega x)}{\omega^2} - \frac{\cos(\omega x)}{\omega}$ und $\int \sin(wx)\mathrm{d}x = -\frac{\cos(\omega x)}{\omega}$ gelöst werden (Formelsammlung):

$$= -\frac{8}{T_0{}^2}\left[\frac{\sin\left(\mu\frac{2\pi}{T_0}t\right)}{\left(\mu\frac{2\pi}{T_0}\right)^2} + \frac{t\cos\left(\mu\frac{2\pi}{T_0}t\right)}{\left(\mu\frac{2\pi}{T_0}\right)}\right]_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}}$$

$$+\frac{8}{T_0{}^2}\left[\frac{\sin\left(\mu\frac{2\pi}{T_0}t\right)}{\left(\mu\frac{2\pi}{T_0}\right)^2} - \frac{t\cos\left(\mu\frac{2\pi}{T_0}t\right)}{\left(\mu\frac{2\pi}{T_0}\right)}\right]_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{3T_0}{4}} - \frac{4}{T_0}\left[-\frac{\cos\left(\mu\frac{2\pi}{T_0}t\right)}{\left(\mu\frac{2\pi}{T_0}\right)}\right]_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{3T_0}{4}}$$

$$= \left[-2\frac{\sin\left(\mu\frac{2\pi}{T_0}t\right)}{\mu^2\pi^2} - \frac{t\cos\left(\mu\frac{2\pi}{T_0}t\right)}{T_0\mu\pi}\right]_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}}$$

$$+\left[2\frac{\sin\left(\mu\frac{2\pi}{T_0}t\right)}{\mu^2\pi^2} + \frac{t\cos\left(\mu\frac{2\pi}{T_0}t\right)}{T_0\mu\pi}\right]_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{3T_0}{4}} + \left[\frac{\cos\left(\mu\frac{2\pi}{T_0}t\right)}{\mu\pi}\right]_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{3T_0}{4}}$$

$$= -\frac{2\sin\left(\mu\frac{\pi}{2}\right)}{\mu^2\pi^2} + \frac{\cos\left(\mu\frac{\pi}{2}\right)}{4\mu\pi} + \frac{2\sin\left(-\mu\frac{\pi}{2}\right)}{\mu^2\pi^2} + \frac{\cos\left(-\mu\frac{\pi}{2}\right)}{4\mu\pi}$$

$$+\frac{2\sin\left(\mu\frac{3\pi}{2}\right)}{\mu^2\pi^2} + \frac{3\cos\left(\mu\frac{3\pi}{2}\right)}{4\mu\pi} - \frac{2\sin\left(-\mu\frac{\pi}{2}\right)}{\mu^2\pi^2} - \frac{\cos\left(-\mu\frac{\pi}{2}\right)}{4\mu\pi} + \frac{\cos\left(\mu\frac{3\pi}{2}\right)}{\mu\pi} - \frac{\cos\left(\mu\frac{\pi}{2}\right)}{\mu\pi}.$$

Es gilt aufgrund der Periodizität der trigonometrischen Funktionen, dass $\sin(\mu\frac{3\pi}{2}) = -\sin(\mu\frac{\pi}{2})$ und dass $\cos(\mu\frac{3\pi}{2}) = \cos(\mu\frac{\pi}{2})$ ist. Außerdem müssen die symmetrischen Eigenschaften $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$ berücksichtigt werden:

$$= \left(-2-2-2-2\right)\frac{\sin\left(\mu\frac{\pi}{2}\right)}{\mu^2\pi^2} + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+1-1\right)\frac{\cos\left(\mu\frac{\pi}{2}\right)}{\mu\pi}$$

$$= -\frac{8\sin\left(\mu\frac{\pi}{2}\right)}{\mu^2\pi^2}.$$

Statt $u(t)$ wird nun das zeitkontinuierliche Signal $u_2(t)$ betrachtet, für dessen Fourier-Reihenkoeffizienten gilt:

$$a_\mu = \begin{cases} \frac{2\sin\left(\mu\,\frac{\pi}{2}\right)}{\pi\,\mu^2}, & 0 < \mu \le 6,\\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$b_\mu = 0.$$

(d) Berechnen Sie die Koeffizienten $a_\mu \neq 0$! Welche Periodendauer ergibt sich für den höchsten vorkommenden Frequenzanteil in $u_2(t)$? Wie hoch darf die Abtastperiode T'_A sein, um $u_2(t)$ verlustfrei abzutasten? (4 P)

Zunächst wird der Einfluss der Sinusfunktion auf die Koeffizienten untersucht:

$$\sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1, & \mu \in \{1, 5\}, \\ -1, & \mu \in \{3\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ergeben sich drei Koeffizienten $a_\mu \neq 0$:

$$\begin{aligned} a_\mu &= \frac{2\sin\left(\mu\,\frac{\pi}{2}\right)}{\pi\,\mu^2}, \\ a_1 &= \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi\,1^2} = \frac{2}{\pi}, \\ a_3 &= \frac{2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi\,3^2} = -\frac{2}{9\pi}, \\ a_5 &= \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi\,5^2} = \frac{2}{25\pi}. \end{aligned}$$

Der Koeffizient a_5 stellt das Gewicht für den dritten und damit höchsten vorkommenden Frequenzanteil dar. Gemäß der Definition der trigonometrischen Fourier-Reihe gilt für die Periodendauer dieser Schwingung:

$$T_5 = \frac{T}{5}.$$

Gemäß Abtasttheorem darf die erforderliche Abtastperiode höchstens halb so groß sein wie die niedrigste vorkommende Periode:

$$T'_\mathrm{A} \leq \frac{T_5}{2} = \frac{T}{10}.$$

(e) Erwarten Sie eine höhere oder niedrigere Abtastperiode gemäß Abtasttheorem für das ursprüngliche Signal $u(t)$ im Vergleich zu $u_2(t)$? Begründen Sie ihre Entscheidung! Gehen Sie dabei auf die geometrischen Eigenschaften des Signals $u(t)$ ein. (2 P)

Die Dreieckschwingung weist an ihren Extremalstellen einen harten Richtungswechsel (Unstetigkeit in der ersten Ableitung) auf. Dieses Verhalten lässt sich nur durch sinusartige Schwingungen mit wesentlich höheren Frequenzen als der Grundschwingung erreichen. Somit ist eine niedrigere Abtastperiode als bei $u_2(t)$ erforderlich. Diese Eigenschaft ist von der Rechteckschwingung oder auch der Sprungfunktion bekannt.

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Gegeben seien die folgenden Koeffizienten der trigonometrischen Fourier-Reihe des zeitkontinuierlichen Signals $y(t)$:

$$a_\mu = b_\mu = \begin{cases} 1, & \mu = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(f) Geben Sie die Definition der trigonometrischen Fourier-Reihe und das Signal $y(t)$ im Zeitbereich an! (2 P)

$y(t)$ ergibt sich durch Einsetzen der Koeffizienten in die Definition der Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \cos\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right). \end{aligned} \tag{1}$$

(g) Skizzieren Sie jeweils eine Periode der geraden und der ungeraden Signalanteile von $y(t)$. Skizzieren Sie anschließend grob den Verlauf von $y(t)$! (4 P)

Hinweis: Denken Sie an eine vollständige Achsenbeschriftung.

Die geraden und ungeraden Anteile von $y(t)$ entsprechen der Sinus- und der Cosinusfunktion aus der Lösung des vorigen Aufgabenteils (vgl. Definition Fourier-Reihe). Die Überlagerung beider Anteile lässt sich mithilfe der eingezeichneten charakteristischen Punkte grob skizzieren.

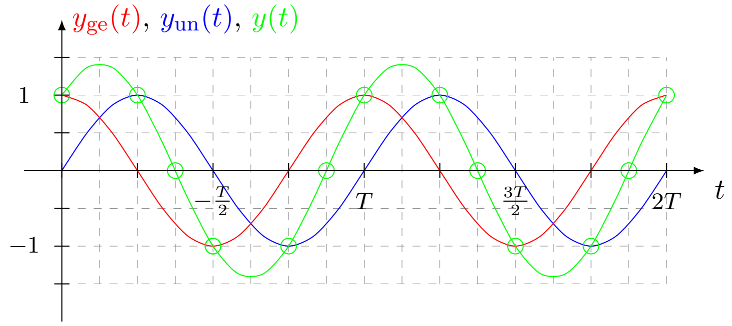


Abbildung 2: Skizze des Signals $y(t)$

(h) Vereinfachen Sie $y(t)$ so weit, dass nur ein einzelner Sinus- oder Cosinus-Term übrig bleibt! Geben Sie Amplitude, Periodendauer und Phasenverschiebung des vereinfachten Signals an! (6 P)

Für $y(t)$ ergibt sich mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$y(t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t)$$

Durch Ersetzen der Sinusfunktion mit $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ ergibt sich:

$$= \cos(\omega t) + \cos(\frac{\pi}{2} - \omega t).$$

Mit dem Additionstheorem $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$ folgt:

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Berechnung des vorderen Cosinusterms mit $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ergibt:

$$= \sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Amplitude: $\hat{y} = \sqrt{2}$, Periode: $T' = \frac{2\pi}{\omega} = T$, Phasenverschiebung: $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.
Die Berechnung is alternativ auch mit Sinus statt Cosinus möglich.

Aufgabe 2 (31 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben seien die Fourier-Transformierte $V_{1,M}(\mu)$ einer diskreten Folge $v_1(n)$ und die Folge $v(n) = v_1(n) \circledast v_2(n)$, beide der Länge $M = 4$:

$$V_{1,4}(\mu) = \begin{cases} 4, & \mu = 0, \\ 2, & \mu = 1, \\ 1, & \mu = 2, \\ \frac{1}{2}, & \mu = 3, \end{cases} \qquad v(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \frac{1}{2}, & n = 1, \\ \frac{1}{4}, & n = 2, \\ \frac{1}{4}, & n = 3. \end{cases}$$

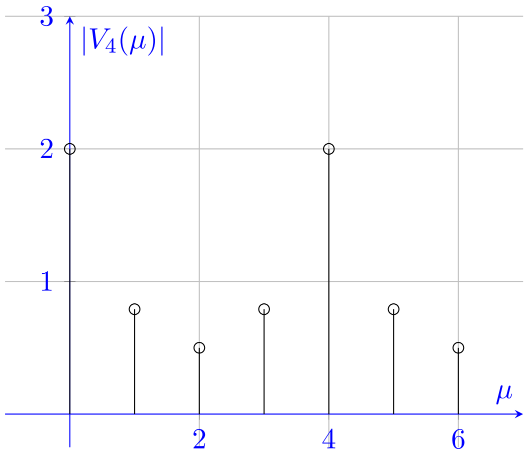
(a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\text{DFT}\{v(n)\}$ für $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. (9 P)

$$\begin{aligned}
V_4(\mu) &= \sum_{n=0}^{3} v(n) e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}n}, \\
V_4(0) &= (1 + 0.5 + 0.25 + 0.25) = 2, \\
V_4(1) &= \left(1 + 0.5 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}} + 0.25 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2} + 0.25 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3}\right) = (1 - j0.5 - 0.25 + j0.25) \\
&= 0.75 - j0.25, \\
V_4(2) &= \left(1 + 0.5 \cdot e^{-j\cdot 2\cdot\frac{2\pi}{4}} + 0.25 \cdot e^{-j\cdot 2\cdot\frac{2\pi}{4}\cdot 2} + 0.25 \cdot e^{-j\cdot 2\cdot\frac{2\pi}{4}\cdot 3}\right) \\
&= (1 - 0.5 + 0.25 - 0.25) = 0.5, \\
V_4(3) &= \left(1 + 0.5 \cdot e^{-j\cdot 3\cdot\frac{2\pi}{4}} + 0.25 \cdot e^{-j\cdot 3\cdot\frac{2\pi}{4}\cdot 2} + 0.25 \cdot e^{-j\cdot 3\cdot\frac{2\pi}{4}\cdot 3}\right) \\
&= (1 + j0.5 - 0.25 - j0.25) = 0.75 + j0.25.
\end{aligned}$$

(b) Die Folge $v(n)$ geht aus der zyklischen Faltung der Folgen $v_1(n)$ und $v_2(n)$ hervor. Wie müssen die Werte der Fourier-Transformierten $V_{2,4}(\mu) = \text{DFT}\{v_2(n)\}$ gewählt werden, um auf das richtige Ergebnis zu kommen? Geben Sie die Werte von $V_{2,4}(\mu)$ für $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ an. (8 P)

$$\begin{aligned}
V_{2,4}(\mu) &= \frac{V_4(\mu)}{V_{1,4}(\mu)}, \\
V_{2,4}(0) &= \frac{2}{4} = 0.5, \\
V_{2,4}(1) &= \frac{0.75 - j0.25}{2} = \frac{3}{8} - j\frac{1}{8} = 0.375 - j0.125, \\
V_{2,4}(2) &= \frac{0.5}{1} = 0.5, \\
V_{2,4}(3) &= \frac{0.75 + j0.25}{0.5} = \frac{3}{2} + j\frac{1}{2} = 1.5 + j0.5.
\end{aligned}$$

(c) Skizzieren Sie den Betrag von $\mathrm{DFT}\{v(n)\}$ für $\mu \in \{0, 1, ..., 6\}$. Achten Sie auf die Achsenbeschriftung und runden Sie auf drei Nachkommastellen!. (4 P)



Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Gegeben seien diskrete Folgen $v_\mathrm{a}(n)$ und $v_\mathrm{b}(n)$ der Länge $M = M_\mathrm{a} = M_\mathrm{b} = 3$:

$$v_\mathrm{a}(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n = 1, \\ 3, & n = 2, \end{cases} \qquad v_\mathrm{b}(n) = \begin{cases} 4, & n = 0, \\ 5, & n = 1, \\ 6, & n = 2. \end{cases}$$

(d) Welche Länge hat jeweils das Ergebnis der zyklischen und der linearen Faltung der beiden oberen Folgen? (2 P)

lineare Faltung: $M_\mathrm{ab,lin} = M_\mathrm{a} + M_\mathrm{b} - 1 = 5$,
zyklische Faltung: $M_\mathrm{ab,zyk} = M = 3$.

(e) Führen Sie die zyklische Faltung der beiden Folgen durch. (4 P)

$$v_\mathrm{a}(n) \circledast v_\mathrm{b}(n) = \sum_{\kappa=0}^{M-1} v_\mathrm{a}(\kappa) v_\mathrm{b}(n-\kappa)_{\mathrm{mod}\ M},$$

$$v_\mathrm{ab}(0) = 31,$$
$$v_\mathrm{ab}(1) = 31,$$
$$v_\mathrm{ab}(2) = 28.$$

(f) Sie führen eine zyklische Faltung einer reellen geraden Folge $v_\mathrm{re,ge}(n)$ mit einer imaginären geraden Folge $j \cdot v_\mathrm{im,ge}(n)$ durch. Welche geraden, ungeraden, imaginären

und reellen Anteile besitzt die Fourier-Transformierte dieser Faltung? (4 P)

$$\begin{aligned}
\mathrm{DFT}\{v_{\mathrm{re,ge}}(n)\} &= V_{\mathrm{re,ge}}(\mu), \\
\mathrm{DFT}\{j \cdot v_{\mathrm{im,ge}}(n)\} &= j \cdot V_{\mathrm{im,ge}}(\mu), \\
\mathrm{DFT}\{(v_{\mathrm{re,ge}}(n)) \circledast (j \cdot v_{\mathrm{im,ge}}(n))\} &= j \cdot V_{\mathrm{re,ge}}(\mu) \cdot V_{\mathrm{im,ge}}(\mu).
\end{aligned}$$

Die Fourier-Transformierte der Faltung ist imaginär und gerade. Das Produkt zweier geraden Funktionen ist eine gerade Funktion.

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

Das System $S_1\{\cdot\}$ ist entsprechend der Gleichung

$$y(n) = e^{jv(n)}$$

mit $y(n) = S_1\{v(n)\}$ definiert. Dabei gilt $v(n) \in \mathbb{R}\,\forall\, n$.

(a) Überprüfen Sie das System $S_1\{\cdot\}$ auf (8 P)

- Linearität,
- Kausalität,
- Verschiebungsinvarianz und
- Stabilität.

- **Linearität**: Ein System ist linear, wenn der Überlagerungssatz gilt:

$$S\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l\, v_l(n)\right\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l\, S\{v_l(n)\}\,.$$

  Mit der Annahme $v(n) = \alpha_1 v_1(n) + \alpha_2 v_2(n)$ gilt für das System $S_1\{\cdot\}$:

$$\begin{aligned} y(n) = S_1\{v(n)\} &= e^{j(\alpha_1 v_1(n)+\alpha_2 v_2(n))} \\ &\neq e^{j\alpha_1 v_1(n)} + e^{j\alpha_2 v_2(n)}\,. \end{aligned}$$

  $\Rightarrow$ Das System ist somit **nicht linear**.

- **Kausalität**: Ein System ist kausal, wenn das Ausgangssignal $y(n)$ nur von vergangenen Werten des Eingangssignals $v(n)$ abhängt.
  Bei dem angegebenen System $S_1\{\cdot\}$ hängt das Ausgangssignal zum Zeitpunkt n_0

$$y(n_0) = e^{jv(n_0)}$$

  nur vom Eingangssignal zum Zeitpunkt n_0 ab.
  $\Rightarrow$ Das System ist **kausal** (und gedächtnislos).

- **Verschiebungsinvarianz**: Ein System ist verschiebungsinvariant, wenn es in der Reihenfolge mit einer Signalverschiebung vertauscht werden darf, d.h. $y(n_0)$ wird nur aus Werten $v(n \leq n_0)$ berechnet.

$$S\{v(n-\kappa)\} = y(n-\kappa)\,.$$

  Auf ein verschobenes Signal reagiert das System mit

$$S_1\{v(n-\kappa)\} = e^{jv(n-\kappa)}$$

$$= y(n-\kappa)\,.$$

$\Rightarrow$ Das System ist somit **verschiebungsinvariant**.

- **Stabilität**: Ein System ist stabil, wenn es auf beschränkte Eingangssignale mit beschränkten Ausgangssignalen reagiert:

$$\text{Für } |v(n)| \leq M_1 < \infty, \forall n \text{ muss gelten } |y(n)| \leq M_2 < \infty, \forall n.$$

Für den Betrag des Ausgangssignals des Systems $S_1\{\cdot\}$ gilt

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left|e^{jv(n)}\right| \\ &= |\cos(v(n)) + j\,\sin(v(n))| = \sqrt{\cos^2(v(n)) + \sin^2(v(n))} \\ &= 1 < \infty\,. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Das System ist **stabil**.

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

Gegeben sei folgende Übertragungsfunktion

$$H_2(s) \;=\; \frac{s^2-2}{s^3+5s^2+9s+5}$$

Hinweis: Eine Polstelle liegt bei $s_{\infty,1} = -1$.

(b) Zeichnen Sie das Pol-/Nullstellendiagramm! Denken Sie hierbei an die korrekte Achsenbeschriftung! (6 P)

Bestimmung der Nullstellen:

$$\begin{aligned} s^2 - 2 &= 0 \\ s^2 &= 2 \\ \rightarrow s_{0,1/2} &= \pm\sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Die erste Polstelle $s_{\infty,1} = -1$ ist bereits gegeben. Für die Bestimmung der restlichen Polstellen, muss zunächst eine Polynomendivision durchgeführt werden:

$$\begin{array}{l} \Big(\;\; s^3 + 5s^2 + 9s + 5\Big) : \Big(s+1\Big) = s^2 + 4s + 5\,\cdot \\ \underline{-\,s^3 \;\;-\,s^2} \\ \qquad\quad 4s^2 + 9s \\ \qquad\;\; \underline{-\,4s^2 - 4s} \\ \qquad\qquad\quad 5s + 5 \\ \qquad\qquad\; \underline{-\,5s - 5} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Bestimmung der restlichen Polstellen:

$$s^2 + 4s + 5 = 0$$

$$(s+2)^2 = -1$$
$$\to s_{\infty,2/3} = -2 \pm j\,.$$

Somit ergibt sich für das Pol-/Nullstellendiagramm:

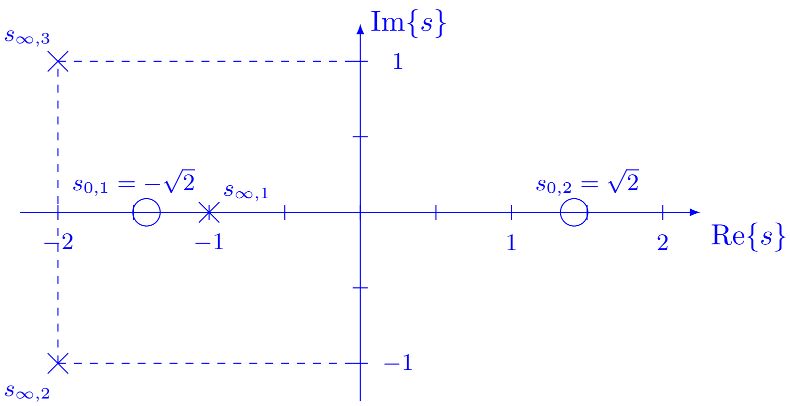


Abbildung 3: Pol-/Nullstellendiagramm der Übertragungsfunktion $H_2(s)$.

(c) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_{0,2}(t)$ des Systems. (8 P)

Die inverse Laplace-Transformation zur Bestimmung der Impulsantwort kann mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung durchgeführt werden. Mit den aus (b) bekannten Polstellen ergibt sich dafür der folgende Ansatz:

$$\begin{aligned} H_2(s) &= \frac{s^2-2}{s^3+5s^2+9s+5} \\ &= \frac{s^2-2}{(s+1)(s+2+j)(s+2-j)} \\ &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2+j} + \frac{C}{s+2-j}\,. \end{aligned}$$

Bestimmung der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{s^2-2}{(s+2+j)(s+2-j)}\right|_{s=-1} = \left.\frac{s^2-2}{s^2+4s+5}\right|_{s=-1} \\ &= \frac{1-2}{1-4+5} = -\frac{1}{2} = -0,5\,, \\ B &= \left.\frac{s^2-2}{(s+1)(s+2-j)}\right|_{s=-2-j} = \frac{(-2-j)^2-2}{(-1-j)(-2j)} \\ &= \frac{1+4j}{2j-2} = \frac{3-5j}{4} = 0,75-1,25j\,, \\ C &= \left.\frac{s^2-2}{(s+1)(s+2+j)}\right|_{s=-2+j} = \frac{(-2+j)^2-2}{(-1+j)(2j)} \\ &= \frac{1-4j}{-2j-2} = \frac{3+5j}{4} = 0,75+1,25j\,. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Korrespondenz $e^{s_\infty t}\delta_{-1}(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-s_\infty}$ aus der Formelsammlung lässt sich die Impulsantwort bestimmen zu:

$$H_2(s) = -0,5\,\frac{1}{s-1} + (0,75 - 1,25j)\,\frac{1}{s+2+j} + (0,75 + 1,25j)\,\frac{1}{s+2-j}$$

$$\begin{array}{c}\bullet\\ |\\ \circ\end{array}$$

$$h_{0,2}(t) = -0,5\,e^{-t}\delta_{-1}(t) + (0,75 - 1,25j)\,e^{(-2-j)t}\delta_{-1}(t) + (0,75 + 1,25j)\,e^{(-2+j)t}\delta_{-1}(t)\,.$$

(d) Ist das angegebene System minimalphasig? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 P)

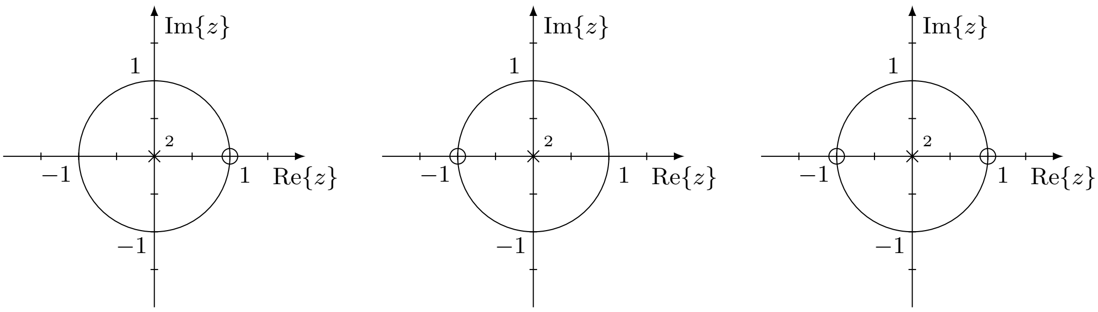
Für ein minimalphasiges, kontinuierliches System muss gelten:

$$\mathrm{Re}\{s_{0,\mu}\} \leq 0, \forall \mu\,,$$

d.h. alle Nullstellen müssen in der linken Halbebene liegen. Das System ist somit nicht minimalphasig, sondern gemischtphasig, da für $s_{0,2}$ gilt $\mathrm{Re}\{s_{0,2}\} = \sqrt{2} > 0$.

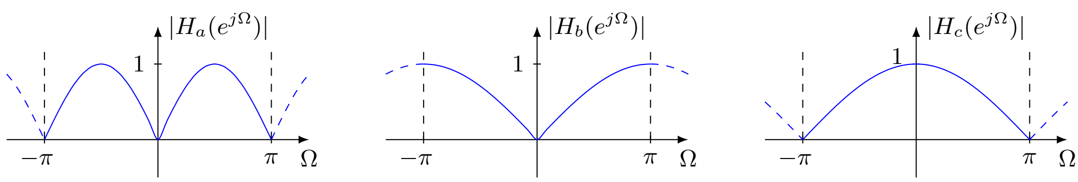
Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.*

Gegeben seien die folgenden Pol-/Nullstellendiagramme (siehe Abbildung 4) sowie die folgenden Betragsfrequenzgänge (siehe Abbildung 5):



PN-Diagramm 1 PN-Diagramm 2 PN-Diagramm 3

Abbildung 4: PN-Diagramme diskreter Systeme.



Betragsfrequenzgang a Betragsfrequenzgang b Betragsfrequenzgang c

Abbildung 5: Betragsfrequenzgänge diskreter Systeme.

(e) Ordnen Sie den Pol-/Nullstellendiagrammen die zugehörigen Betragsfrequenzgänge zu und begründen Sie Ihre Antwort. (6 P)

- Das PN-Diagramm 1 und der Betragsfrequenzgang $H_b(e^{j\Omega})$ gehören zusammen, da durch die Nullstelle $z_0 = 1$ niedrige Frequenzen unterdrückt werden. Es handelt sich also um ein Hochpassfilter, wie durch den Betragsfrequenzgang ersichtlich wird.
- Das PN-Diagramm 2 und der Betragsfrequenzgang $H_c(e^{j\Omega})$ gehören zusammen, da durch die Nullstelle $z_0 = -1$ hohe Frequenzen unterdrückt werden. Es handelt sich also um ein Tiefpassfilter, wie durch den Betragsfrequenzgang ersichtlich wird.
- Das PN-Diagramm 3 und der Betragsfrequenzgang $H_a(e^{j\Omega})$ gehören zusammen, da durch die Nullstelle $z_{0,1} = 1$ niedrige Frequenzen und die Nullstelle $z_{0,2} = -1$ hohe Frequenzen unterdrückt werden. Es handelt sich also um ein Bandpassfilter, wie durch den Betragsfrequenzgang ersichtlich wird.

Dies ist eine leere Seite.