Signale und Systeme I

Modulklausur SS 2018

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

Datum: 21.09.2018

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.
Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________________

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/32	/30	/38

Summe der Punkte: ________________ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ________________ Unterschrift: ______________________________

Signale und Systeme I

Modulklausur SS 2018

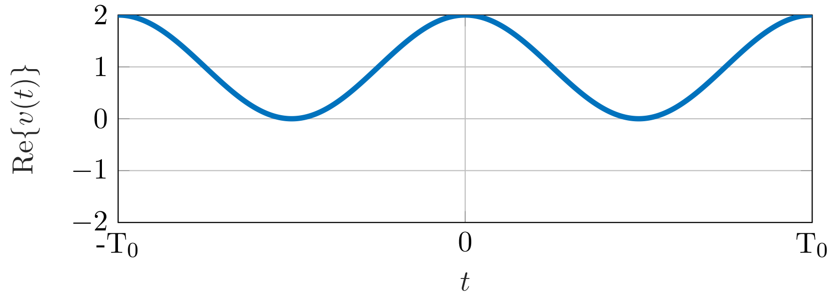
Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Datum:	21.09.2018
Zeit:	9:00 h – 10:30 h (90 Minuten)
Ort:	OHP5 - Chemie I + II

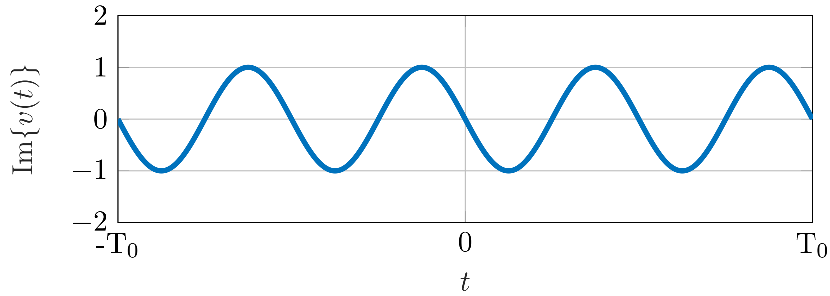
Hinweise

- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**.
- Legen Sie Ihren Studentenausweis und Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Die Aufgaben dürfen erst bearbeitet werden, wenn alle Teilnehmer die Aufgabenstellungen erhalten haben.
- Während der Klausur werden nur Fragen zur Aufgabenstellung beantwortet.
- Verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** einen **neuen** mit **Namen und Matrikelnummer** versehenen Papierbogen. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden.
- Verwenden Sie zum Schreiben weder Bleistift noch Rotstift.
- Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Blatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Mobiltelefone sind auszuschalten. Laptops, Tablets, Smartwatches und ähnliche Geräte sind nicht erlaubt, da sie als Kommunikationsmittel tauglich sind.
- Die Aufgaben und eine Lösung werden auf der Homepage der Vorlesung veröffentlicht. Dort werden ebenso Termin und Ort der Klausureinsicht bekanntgegeben.

Aufgabe 1 (32 Punkte)

Gegeben sei das folgende Signal $v(t)$, dessen Real- und Imaginärteil hier dargestellt sind:





Die Periodendauer des Signals $v(t)$ sei T_0.

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

(a) Geben Sie $v(t)$ als Formel abhängig von $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ an. (2 P)

$$v(t) = 1 + \cos(\omega_0 t) - j\sin(2\omega_0 t)$$

(b) Geben Sie allgemein die Definition der komplexen Fourier-Reihendarstellung eines Signals an. (2 P)

$$x(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_\mu \, e^{j\mu\frac{2\pi}{T}t}$$

(c) Erwarten Sie gerade und/oder ungerade Fourier-Koeffizienten? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 P)
Das Signal weist sowohl gerade reelle als auch ungerade imaginäre Anteile auf. Somit müssen sowohl gerade als auch ungerade, jedoch nur reelle, Fourier-Koeffizienten auftreten.

(d) Berechnen Sie die komplexen Koeffizienten c_μ der Fourier-Reihe des Signals $v(t)$. (6 P)
Aufteilung des Signals in Exponential-Terme zur direkten Identifikation:

$$\begin{aligned} v(t) &= 1 + \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) - j\frac{1}{2j}\left(e^{j2\omega_0 t} - e^{-j2\omega_0 t}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} - \frac{1}{2}e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\omega_0 t} \end{aligned}$$

Es lässt sich ablesen:

$$c_\mu = \begin{cases} 1 & \text{, falls } \mu = 0 \\ 0,5 & \text{, falls } \mu = -2, -1, 1 \\ -0,5 & \text{, falls } \mu = 2 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

(e) Wie lautet der Zusammenhang zwischen der Fourier-Transformierten eines periodischen Signals und dessen Fourier-Reihenkoeffizienten? Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $V(jw)$ des Signals $v(t)$. (4 P)

$$V(j\omega) = 2\pi \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_\mu \delta_0\left(\omega - \mu\frac{2\pi}{T_0}\right)$$

Für $V(j\omega)$ ergibt sich:

$$V(j\omega) = 2\pi\delta_0(\omega) + \pi\Big(\delta_0(\omega + 2\omega_0) - \delta_0(\omega - 2\omega_0) + \delta_0(\omega + \omega_0) + \delta_0(\omega - \omega_0)\Big)$$

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Im Folgenden wird das reelle Signal

$$v_2(t) = 1 + \cos(\omega_0 t) + \cos(3\omega_0 t) \tag{1}$$

betrachtet.

(f) Das Signal wird mit zwei verschiedenen Abtastperioden (6 P)

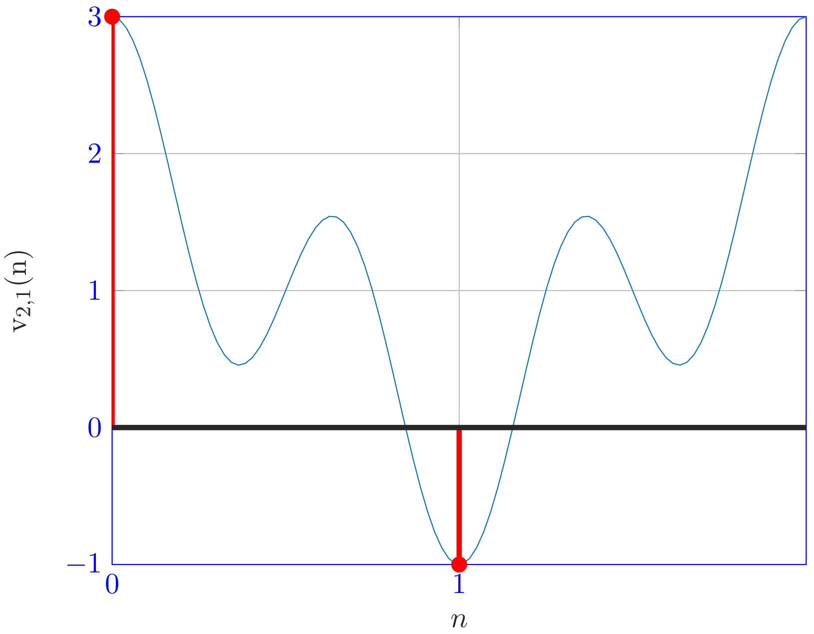
(i) $T_{A,1} = \frac{T_0}{2}$

(ii) $T_{A,2} = \frac{T_0}{8}$

jeweils abgetastet. Dabei gilt weiterhin $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Geben Sie die abgetasteten Folgen $v_{2,1}(n)$ und $v_{2,2}(n)$ an. Skizzieren Sie jeweils eine Periode der Folgen.

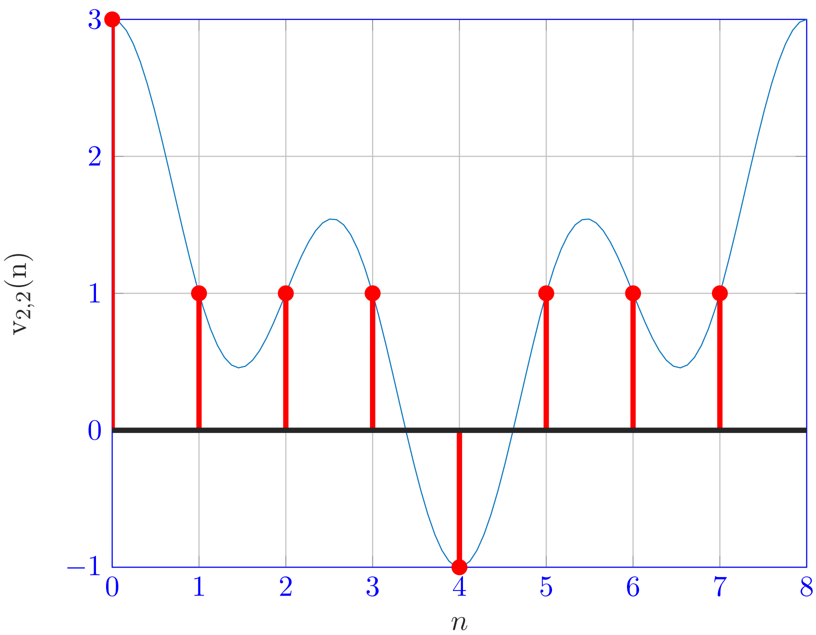
$$v_{2,1}(n) = \begin{cases} 3 & , n = 0, \lambda T_1 \\ -1 & , n = 1, \lambda T_1 + 1 \end{cases}$$

mit $T_1 = 2$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$



$$v_{2,2}(n) = \begin{cases} 3 & , n = 0, \lambda T_2 \\ 1 & , n = 1, \lambda T_2 + 1 \\ 1 & , n = 2, \lambda T_2 + 2 \\ 1 & , n = 3, \lambda T_2 + 3 \\ -1 & , n = 4, \lambda T_2 + 4 \\ 1 & , n = 5, \lambda T_2 + 5 \\ 1 & , n = 6, \lambda T_2 + 6 \\ 1 & , n = 7, \lambda T_2 + 7 \end{cases}$$

mit $T_2 = 8$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$



(g) Wie lautet die Definition des Abtasttheorems? Wird das Abtasttheorem bei beiden Abtastperioden eingehalten? (2 P)

Das Abtasttheorem besagt, dass ein Signal, bandbegrenzt durch eine maximale Frequenz ω_B, dann eindeutig bestimmt ist, wenn für die Abtastfrequenz ω_A folgendes gilt:

$$\omega_A > 2\omega_B.$$

Somit wird das Abtasttheorem nur bei der 2. Abtastung eingehalten.

(h) Berechnen Sie die DFT der beiden abgetasteten Folgen $v_{2,1}(n)$ und $v_{2,2}(n)$. Verwenden Sie die minimalen DFT-Ordnungen. Es ergeben sich die DFT-Ordnungen $M_1 = 2$ für $v_{2,1}(n)$ und $M_2 = 8$ für $v_{2,2}(n)$. Lässt sich ein Effekt im Spektrum erkennen? Wie wird dieser Effekt genannt und wie wird dadurch das resultierende Spektrum beeinflusst? (8 P)

$$V_{2,1}(\mu) = \begin{cases} 2 & ,\mu = 0, \lambda M_1 \\ 4 & ,\mu = 1, \lambda M_1 + 1 \end{cases}$$

mit $M_1 = 2$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$
Rechenweg:

$$V_{2,1}(\mu = 0) = 3e^0 - 1e^0 = 3 - 1 = 2$$
$$V_{2,1}(\mu = 1) = 3e^0 - 1e^{-j\pi} = 3 + 1 = 4$$

$$V_{2,2}(\mu) = \begin{cases} 8 & ,\mu = 0, \lambda M_2 \\ 4 & ,\mu = 1, \lambda M_2 + 1 \\ 0 & ,\mu = 2, \lambda M_2 + 2 \\ 4 & ,\mu = 3, \lambda M_2 + 3 \\ 0 & ,\mu = 4, \lambda M_2 + 4 \\ 4 & ,\mu = 5, \lambda M_2 + 5 \\ 0 & ,\mu = 6, \lambda M_2 + 6 \\ 4 & ,\mu = 7, \lambda M_2 + 7 \end{cases}$$

mit $M_2 = 8$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$

Rechenweg:

$$\begin{aligned}
V_{2,2}(\mu = 0) &= 3e^0 + 1e^0 + 1e^0 + 1e^0 - 1e^0 + 1e^0 + 1e^0 + 1e^0 \\
&= 3 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1 \\
&= 8 \\
V_{2,2}(\mu = 1) &= 3e^0 + 1e^{-j\frac{\pi}{4}} + 1e^{-j\frac{\pi}{2}} + 1e^{-j\frac{3\pi}{4}} - 1e^{-j\pi} + 1e^{-j\frac{5\pi}{4}} + 1e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 1e^{-j\frac{7\pi}{4}} \\
&= 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) + j + \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j) + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-j) - j + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j) \\
&= 4 \\
V_{2,2}(\mu = 2) &= 3e^0 + e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\pi} + e^{-j\frac{3\pi}{2}} - e^{-j2\pi} + e^{-j\frac{5\pi}{2}} + e^{-j3\pi} + e^{-j\frac{7\pi}{2}} \\
&= 3 + j - 1 - j - 1 + j - 1 + j \\
&= 0 \\
V_{2,2}(\mu = 3) &= 3e^0 + e^{-j\frac{3\pi}{4}} + e^{-j\frac{3\pi}{2}} + e^{-j\frac{\pi}{4}} - e^{-j\pi} + e^{-j\frac{7\pi}{4}} + e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\frac{5\pi}{4}} \\
&= 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j) - j + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j) + j + \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-j) \\
&= 4 \\
V_{2,2}(\mu = 4) &= 3e^0 + e^{-j\pi} + e^{-j2\pi} + e^{-j3\pi} - e^{-j4\pi} + e^{-j5\pi} + e^{-j6\pi} + e^{-j7\pi} \\
&= 3 - 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die restlichen Ergebnisse ergeben sich aus den Symmetrie-Eigenschaften der DFT.

Durch die zu niedrige Abtastung tritt im ersten Spektrum Aliasing auf. Die Anteile durch höhere Frequenzen werden in den berechneten Bereich gespiegelt. Das kontinuierliche Original-Signal lässt sich nicht mehr rekonstruieren.

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.*

Die DFT eines diskreten Signals $v(n)$ lässt sich wie folgt aufschreiben:

$$V_M(\mu) = V_{M\,\mathrm{re,ge}}(\mu) + V_{M\,\mathrm{re,un}}(\mu) + jV_{M\,\mathrm{im,ge}}(\mu) + jV_{M\,\mathrm{im,un}}(\mu).$$

Die Indizierung in der oberen Gleichung lässt sich wie folgt entschlüsseln: „re“ steht für reell, „im“ für imaginär, „ge“ für gerade und „un“ für ungerade.

(a) Angenommen das Signal $v(n)$ wäre reell, wie würde sich die obere Gleichung vereinfachen? Führen Sie die Vereinfachung durch. (2 P)

$$V_M(\mu) = V_{M\,\mathrm{re,ge}}(\mu) + jV_{M\,\mathrm{im,un}}(\mu).$$

(b) Für die DFT aus Aufgabenteil (a) wird die Frequenzumkehrung $V_M(-\mu)$ durchgeführt. Schreiben Sie die Gleichung für $V_M(-\mu)$ so um, dass ein Ausdruck mit Abhängigkeit von $V_M(\mu)$ entsteht. (4 P)

$$V_M(-\mu) = V_{M\,\mathrm{re,ge}}(-\mu) + jV_{M\,\mathrm{im,un}}(-\mu) = V_{M\,\mathrm{re,ge}}(\mu) - jV_{M\,\mathrm{im,un}}(\mu) = V_M^*(\mu).$$

(c) Welche Erkenntnis aus dem Ergebnis des Aufgabenteils (b) lässt sich somit für die DFT von reellen Signale ableiten? Schreiben Sie Ihre Antwort in einem bis zwei Sätzen auf. (2 P)
Bei reellen Signalen muss nur eine Hälfte der DFT plus ein Element gespeichert werden. Die andere lässt sich rekonstruieren.

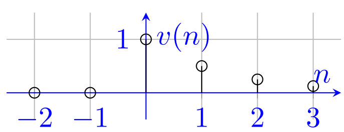
Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 3 gelöst werden.*

Gegeben sei das diskrete Signal:

$$v(n) = a^n\,\gamma_{-1}(n),$$

mit $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$ und $\gamma_{-1}(n)$ als Sprungfolge.

(d) Skizzieren Sie das diskrete Signal für $a = 0.5$. Achten Sie auf die richtige Achsenbeschriftung! (3 P)



(e) Ist das Signal $v(n)$ reell und ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 P)
Das Signal $v(n)$ ist reell und enthält gerade und ungerade Anteile.

(f) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $V(e^{j\Omega})$ des Signals $v(n)$. (2 P)

$$V(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - a\,\mathrm{e}^{-j\Omega}}$$

(g) Geben Sie die Anteile $V_{\text{re,ge}}(e^{j\Omega})$, $V_{\text{re,un}}(e^{j\Omega})$, $V_{\text{im,ge}}(e^{j\Omega})$ und $V_{\text{im,un}}(e^{j\Omega})$ der Fourier-Transformierten aus Aufgabenteil (f) an. (6 P)

$$V_{\text{re,ge}}(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - a\,\mathrm{e}^{-j\Omega}} + \frac{1}{1 - a\,\mathrm{e}^{j\Omega}}\right) = \frac{1 - \frac{a}{2}\left(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}\right)}{a^2 + 1 - a\,(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega})} = \frac{1 - a\cos(\Omega)}{a^2 + 1 - 2a\cos(\Omega)},$$

$$jV_{\text{im,un}}(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - a\,\mathrm{e}^{-j\Omega}} - \frac{1}{1 - a\,\mathrm{e}^{j\Omega}}\right) = \frac{-ja\sin(\Omega)}{a^2 + 1 - 2a\cos(\Omega)},$$

$$V_{\text{re,un}}(e^{j\Omega}) = V_{\text{im,ge}}(e^{j\Omega}) = 0.$$

Hinweis: Um die geraden und ungeraden Anteile einer Funktion zu bestimmen, können folgende Korrespondenzen benutzt werden:

$$\begin{aligned} f(n) &= f_{\text{ge}}(n) + f_{\text{un}}(n), \\ f_{\text{ge}}(n) &= \frac{f(n) + f(-n)}{2}, \\ f_{\text{un}}(n) &= \frac{f(n) - f(-n)}{2}. \end{aligned}$$

Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei das Signal:

$$y(n) = v(n)\,e^{j\Omega_T n},$$

mit $2\Omega_G < \Omega_T < 2\pi - 2\Omega_G$. Für die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}\{v(n)\} = V(e^{j\Omega})$ im Frequenzbereich $[-\pi, \pi]$ mit der Grenzfrequenz $\Omega_G \ll \pi$ gilt:

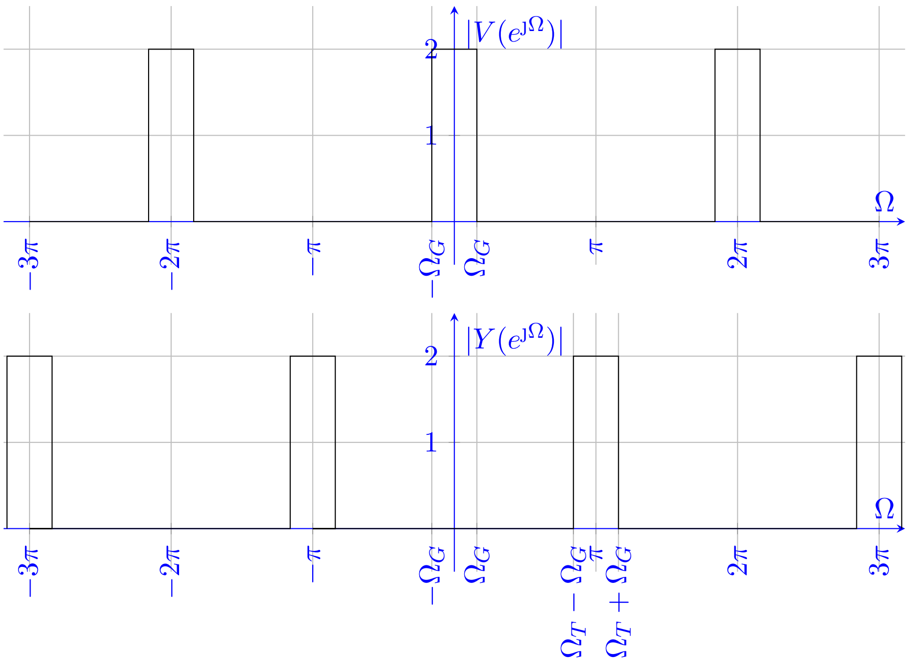
$$|V(e^{j\Omega})| = \begin{cases} 2 & , \ -\Omega_G \leqslant \Omega \leqslant \Omega_G \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}.$$

(h) Skizzieren Sie den Betrag der Fourier-Transformierten von $v(n)$ und $y(n)$ für $\Omega \in [-2\pi, 2\pi]$. (3 P)
Für $\Omega_T = \pi$:

(i) Was gilt für das Spektrum außerhalb des Bereichs $[-\pi, \pi]$ allgemein? (2 P)
Das Spektrum außerhalb des Bereichs $[-\pi, \pi]$ wiederholt sich periodisch.

(j) Wie lässt sich das Signal $V(e^{j\Omega})$ wieder rekonstruieren? Notieren Sie die entsprechende Gleichung und berechnen Sie das Ergebnis. (4 P)
Durch eine erneute Modulation lässt sich das Signal wieder rekonstruieren.

$$z(n) = v(n)\,e^{j\Omega_T n}\,e^{-j\Omega_T n} = v(n)\,e^{j(\Omega_T - \Omega_T)n} = v(n).$$



Aufgabe 3 (38 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei folgende diskrete Impulsantwort:

$$h_0(n) = -\frac{4}{3}\gamma_0(n) + \frac{7}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)^n \gamma_{-1}(n) + \frac{7}{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)^n \gamma_{-1}(n)$$

mit $\gamma_0(n)$ als Impulsfolge und $\gamma_{-1}(n)$ als Sprungfolge.

(a) Zeichnen Sie die Impulsantwort $h_0(n)$ im Bereich $-2 \leq n \leq 4$. Denken Sie dabei an alle Achsenbeschriftungen! (4 P)

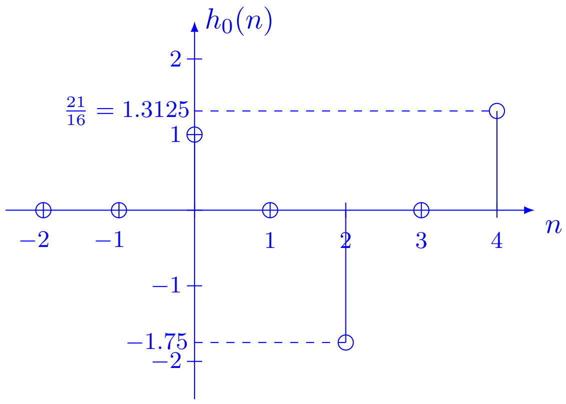


Abbildung 1: Zeitliche Darstellung der Impulsantwort $h_0(n)$

(b) Bestimmen Sie aus der Impulsantwort $h_0(n)$ die zugehörige Übertragungsfunktion $H_0(z)$. Fassen Sie so weit es geht zusammen und stellen Sie die Übertragungsfunktion in Polynomdarstellung dar. (6 P)

$$h_0(n) = -\frac{4}{3}\,\gamma_0(n) + \frac{7}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)^n \gamma_{-1}(n) + \frac{7}{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)^n \gamma_{-1}(n)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$H_0(z) = -\frac{4}{3} + \frac{7}{6}\,\frac{z}{z - \frac{\sqrt{3}}{2}j} + \frac{7}{6}\,\frac{z}{z + \frac{\sqrt{3}}{2}j}$$

$$H_0(z) = \frac{-\frac{4}{3}\left(z^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{7}{6}\left(z^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}zj\right) + \frac{7}{6}\left(z^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}zj\right)}{z^2 + \frac{3}{4}}$$

$$H_0(z) = \frac{-\frac{4}{3}z^2 - 1 + \frac{7}{6}z^2 + \frac{7}{6}z^2}{z^2 + \frac{3}{4}}$$

$$H_0(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + \frac{3}{4}}$$

(c) Zeichnen Sie das Pol-/Nullstellen-Diagramm. (4 P)

Berechnung der Nullstellen:

$$z^2 - 1 = 0$$
$$(z-1)(z+1) = 0$$
$$\to z_{0,1} = -1 \wedge z_{0,2} = 1$$

Berechnung der Polstellen:

$$z^2 + \frac{3}{4} = 0$$
$$\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = 0$$
$$\to z_{\infty,1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}j \wedge z_{\infty,2} = \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

Daraus ergibt sich das folgende Pol-/Nullstellen-Diagramm:

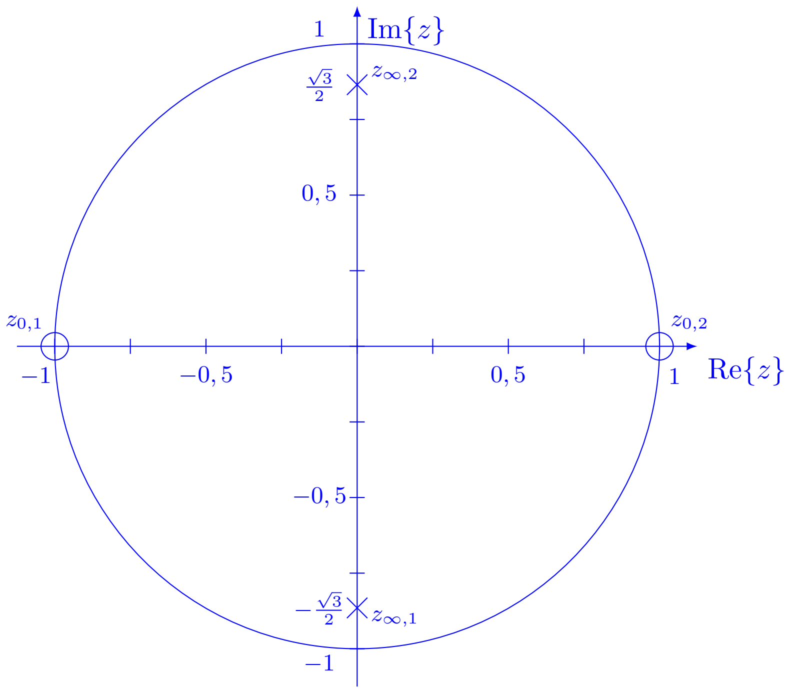


Abbildung 2: Pol-Nullstellen-Diagramm

(d) Um welche Art Filter handelt es sich bei dem angegebenen System (Tiefpass, Hochpass, Bandpass, Bandsperre, Allpass)? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)
Es handelt sich um einen Bandpass, da die Nullstelle bei $z_{0,2} = 1$ die niedrigen und die Nullstelle bei $z_{0,1} = -1$ die hohen Frequenzen unterdrückt. Zusätzlich werden Frequenzen zwischen den niedrigen und hohen Frequenzen durch die beiden Polstellen $z_{\infty,1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}j$ und $z_{\infty,2} = \frac{\sqrt{3}}{2}j$ verstärkt.

(e) Ist das angegebene System stabil? Begründen Sie sowohl anhand der Übertragungsfunktion als auch anhand der Impulsantwort des Systems. (3 P)
Aus der Übertragungsfunktion und der Impulsantwort lässt sich ablesen, dass das System stabil ist.

Begründung anhand der Übertragungsfunktion:
Die Pole der Übertragungsfunktion befinden sich alle innerhalb des Einheitskreises, d.h. es gilt $|z_{\infty,i}| < 1$ und das System ist stabil.

Begründung anhand der Impulsantwort:
Die Impulsantwort klingt mit der Zeit ab, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} h_0(n) = 0$. Daraus folgt, dass die Impulsantwort absolut summierbar ist $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |h_0(n)| < \infty$. Das System ist somit stabil.

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Gegeben sei folgende Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich:

$$H_1(s) = \frac{s^2 - 2s}{(s-1)(s^2+2s+2)}$$

Im Folgenden soll das System $H_1(s)$ mit einem System $H_2(s)$ in Reihe geschaltet werden, sodass das Gesamtsystem $H_3(s)$ entsteht:

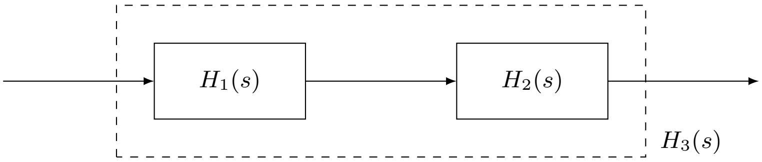


Abbildung 3: Reihenschaltung der Systeme $H_1(s)$ und $H_2(s)$.

(f) Stellen Sie ein System $H_2(s)$ mit einer **minimalen** Anzahl an Pol- und Nullstellen auf, sodass das Gesamtsystem $H_3(s)$ **stabil**, **minimalphasig** und **reellwertig** wird. Geben Sie auch das resultierende Gesamtsystem $H_3(s)$ an und erläutern Sie, warum dieses System stabil, minimalphasig und reellwertig ist! (8 P)

Bestimmung der Nullstellen:

$$\begin{aligned} s^2 - 2s &= 0 \\ s\,(s-2) &= 0 \\ \rightarrow s_{0,1} &= 0 \\ \rightarrow s_{0,2} &= 2 \end{aligned}$$

Berechnung der Polstellen:

$$\begin{aligned} (s-1)(s^2+2s+2) &= 0 \\ \rightarrow s_{\infty,1} &= 1 \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} (s^2+2s+2) &= 0 \\ (s+1)^2 &= -1 \\ s+1 &= \pm j \\ \rightarrow s_{\infty,2} &= -1-j \\ \rightarrow s_{\infty,3} &= -1+j \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$H_1(s) = \frac{s(s-2)}{(s-1)(s+1+j)(s+1-j)}$$

Das System ist bereits reellwertig, da alle Pol- und Nullstellen reellwertig sind oder in konjugiert komplexer Form vorliegen. Durch die Nullstelle bei $s_{0,2} = 2$ ist das System gemischtphasig, da sich nun eine Nullstelle in der rechten Halbebene befindet (und eine in der linken). Die Polstelle $s_{\infty,1} = 1$ führt dazu, dass das System nicht stabil ist, da diese in der rechten Halbebene liegt. Daraus folgt, dass die Polstelle und die Nullstelle durch das System $H_2(s)$ "kompensiert"werden müssen, um das Gesamtsystem $H_3(s)$ reellwertig, minimalphasig und stabil zu kriegen.
Da gilt

$$H_3(s) = H_1(s)\, H_2(s)$$

muss für $H_2(s)$ gelten:

$$H_2(s) = \frac{s-1}{s-2}$$

und somit gilt für das Gesamtsystem

$$\begin{aligned}
H_3(s) &= H_1(s)\, H_2(s) \\
H_3(s) &= \frac{s(s-2)}{(s-1)(s+1+j)(s+1-j)} \frac{s-1}{s-2} \\
H_3(s) &= \frac{s}{(s+1+j)(s+1-j)} \\
H_3(s) &= \frac{s}{s^2+2s+2}
\end{aligned}$$

Dieses System ist:

- stabil, da die Polstellen $\mathrm{Re}\{s_{\infty,1/2}\} < 0$ in der linken Halbebene liegen
- minmalphasig, da die Nullstelle $\mathrm{Re}\{s_{0,1}\} \leq 0$ in der linken Halbebene liegt
- und reellwertig, da alle Pol- und Nullstellen reell sind bzw. in konjugiert komplexen Paaren vorliegen.

(g) Berechnen Sie den Frequenzgang $H_3(j\omega)$ des Gesamtsystems $H_3(s)$. Teilen Sie diesen in Real- und Imaginärteil auf! (4 P)
Für den Frequenzgang $H_3(j\omega)$ gilt:

$$\begin{aligned}
H_3(j\omega) &= H_3(s)|_{s=j\omega} \\
H_3(j\omega) &= \frac{j\omega}{2-\omega^2+2j\omega} \\
H_3(j\omega) &= \frac{j\omega(2-\omega^2-2j\omega)}{(2-\omega^2)^2+4\omega^2} \\
H_3(j\omega) &= \frac{2\omega^2 - j\omega^3 + 2j\omega}{4-4\omega^2+\omega^4+4\omega^2} \\
H_3(j\omega) &= \frac{2\omega^2 + j\,(2\omega-\omega^3)}{4+\omega^4}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Im}\{H_3(j\omega)\} = \frac{2\omega-\omega^3}{4+\omega^4}$$

$$\mathrm{Re}\{H_3(j\omega)\} = \frac{2\omega^2}{4+\omega^4}$$

(h) Berechnen Sie aus dem Frequenzgang $H_3(j\omega)$ den Betragsfrequenzgang $|H_3(j\omega)|$ des Systems und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. (4 P)

Aus dem Frequenzgang lässt sich der Betragsfrequenzgang ermitteln:

$$|H_3(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}\{H_3(j\omega)\}^2 + \mathrm{Im}\{H_3(j\omega)\}^2}$$
$$|H_3(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{2\omega^2}{4+\omega^4}\right)^2 + \left(\frac{2\omega-\omega^3}{4+\omega^4}\right)^2}$$
$$|H_3(j\omega)| = \frac{\sqrt{4\omega^4 + 4\omega^2 - 4\omega^4 + \omega^6}}{4+\omega^4}$$
$$|H_3(j\omega)| = \frac{\sqrt{4\omega^2 + \omega^6}}{4+\omega^4}$$
$$|H_3(j\omega)| = \frac{\omega\sqrt{4+\omega^4}}{4+\omega^4}$$
$$|H_3(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{4+\omega^4}}$$

(i) Können die Frequenzgänge $H_1(j\omega)$ und $H_2(j\omega)$ direkt aus den Übertragungsfunktionen $H_1(s)$ und $H_2(s)$ bestimmt werden? Begründen Sie Ihre Antwort! (3 P)

Hinweis: Achten Sie bei Aufgabenteil (i) auf die Konvergenzgebiete der Übertragungsfunktionen!

Um den Frequenzgang direkt aus der Übertragungsfunktion bestimmen zu können, muss die imaginäre Achse zum Konvergenzgebiet der Übertragungsfunktion gehören. Bei den Systemen $H_1(s)$ und $H_2(s)$ kann der Frequenzgang demnach nicht direkt aus der Übertragungsfunktion bestimmt werden, da für die Konvergenzgebiete gilt $\mathrm{Re}\{s\} > 1$ (bei $H_1(s)$) und $\mathrm{Re}\{s\} > 2$ (bei $H_2(s)$). Die imaginäre Achse gehört somit nicht zum Konvergenzgebiet.

Dies ist eine leere Seite.