

Problem 8 (FFT reeller und komplexer Signale)

Nehmen Sie an es ist ein Programm zur Berechnung der DFT komplexer Signale erhältlich. Will man die DFT reeller Signale berechnen, kann einfach der Imaginärteil als Null angenommen und das Programm direkt benutzt werden. Trotz allem kann die Symmetrie der DFT reeller Signale ausgenutzt werden, um den Berechnungsaufwand zu reduzieren.

- (a) Sei $x(n)$ ein reellwertiges Signal der Länge M und sei $X(\mu)$ dessen DFT mit

$$X(\mu) = X_R(\mu) + j X_I(\mu).$$

Zeigen Sie, dass für reelle $x(n)$ die Beziehungen $X_R(\mu) = X_R(M - \mu)$ und $X_I(\mu) = -X_I(M - \mu)$ für $\mu = 1, \dots, M - 1$ gelten.

- (b) Betrachten Sie nun die zwei reellwertigen Signale $x_1(n)$ und $x_2(n)$ mit ihren DFTs $X_1(\mu)$ und $X_2(\mu)$. Sei $g(n) = x_1(n) + j x_2(n)$ ein komplexes Signal mit der zugehörigen DFT $G(\mu) = G_R(\mu) + j G_I(\mu)$. Seien ausserdem $G_{UR}(\mu)$, $G_{GR}(\mu)$, $G_{UI}(\mu)$ und $G_{GI}(\mu)$ die ungeraden bzw. geraden Real- und Imaginärteile von $G(\mu)$. Es gilt für $1 \leq \mu \leq M - 1$,

$$G_{UR}(\mu) = 1/2\{G_R(\mu) - G_R(M - \mu)\},$$

$$G_{GR}(\mu) = 1/2\{G_R(\mu) + G_R(M - \mu)\},$$

$$G_{UI}(\mu) = 1/2\{G_I(\mu) - G_I(M - \mu)\},$$

$$G_{GI}(\mu) = 1/2\{G_I(\mu) + G_I(M - \mu)\},$$

und $G_{UR}(0) = G_{UI}(0) = 0$, $G_{GR}(0) = G_R(0)$, $G_{GI}(0) = G_I(0)$.

Bestimmen Sie Ausdrücke für $X_1(\mu)$ und $X_2(\mu)$ bezogen auf $G_{UR}(\mu)$, $G_{GR}(\mu)$, $G_{UI}(\mu)$ und $G_{GI}(\mu)$.